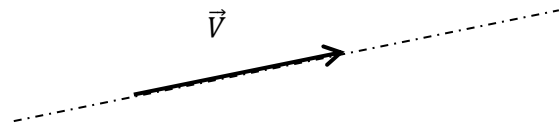


Définition

Un vecteur \vec{v} est défini par :

- Un support (ou direction),
- Un sens,
- Une norme $\|\vec{v}\|$.



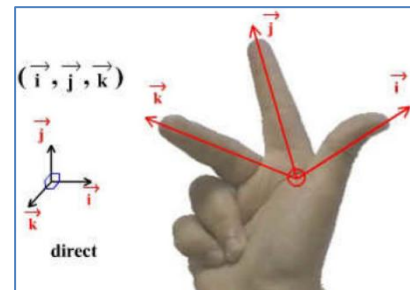
Coordonnées ou composantes dans un repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

Un repère de l'espace est la donnée d'un point origine O et d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

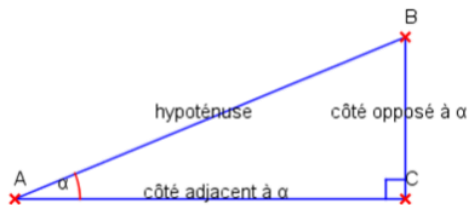
Base orthonormée directe :

Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée directe si :

- Les vecteurs \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} de la base sont orthogonaux,
- Les vecteurs \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} de la base sont unitaires,
- On passe d'un axe à l'autre par une rotation de $+\pi/2$ (sens trigonométrique).



Projection d'un vecteur dans un plan



Moyen mnémotechnique : SOH CAH TOA

$$\sin \alpha = \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}}$$

Dans le plan $\vec{x}\vec{y}$, les relations entre la norme du vecteur, sa direction et ses composantes sont :

$$V_x = \|\vec{v}\| \cdot \cos \alpha$$

$$V_y = \|\vec{v}\| \cdot \sin \alpha \quad \tan \alpha = \frac{V_y}{V_x}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

Composantes d'un vecteur

Ecritures équivalentes : $\vec{v} = X\vec{x} + Y\vec{y} + Z\vec{z}$

$$\vec{v} : \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

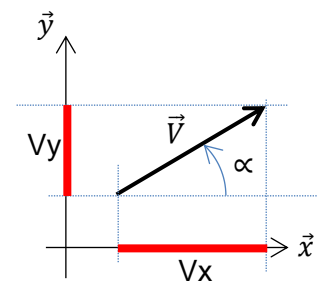
$$\vec{v}(X, Y, Z)$$

La norme $\|\vec{v}\|$ est égale à : $\|\vec{v}\| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$.

Soient A et B deux points tels que : $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$,

le vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

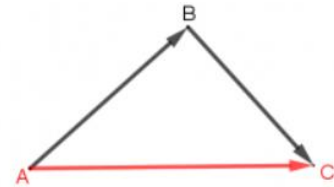
Pour un vecteur \overrightarrow{AB} , un vecteur unitaire \vec{u} de direction (AB) et de sens de A vers B : $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$



Somme, soustraction, produit par un scalaire

Si $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{AC}$ sont trois vecteurs et λ un scalaire alors :

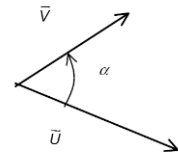
- $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{BC} + \vec{AB}$
- $\vec{BC} = -\vec{CB}$
- $\lambda(\vec{AB} + \vec{BC}) = \lambda \cdot \vec{AB} + \lambda \cdot \vec{BC}$
- Relation de Chasles : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$



Produit scalaire (dot product) de deux vecteurs :

C'est un nombre réel : $\vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\| \times \cos(\vec{U}, \vec{V})$.

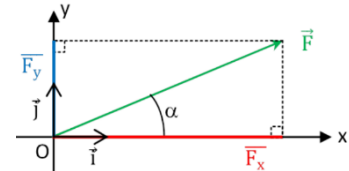
$$\text{Si } \vec{V}_1 \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{V}_2 \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} \text{ alors } \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$$



Propriétés :

- $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$ si $\vec{U} = 0$ ou $\vec{V} = 0$ ou $(\vec{U}, \vec{V}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- Dans une base orthonormée $\mathcal{B}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$: $\vec{x} \cdot \vec{x} = \vec{y} \cdot \vec{y} = \vec{z} \cdot \vec{z} = 1$
 $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{z} = \vec{z} \cdot \vec{x} = 0$

- La composante de \vec{F} sur l'axe x est le résultat du produit scalaire de \vec{F} et du vecteur unitaire \vec{i} : $F_x = \vec{F} \cdot \vec{i}$



Produit vectoriel (cross product) de deux vecteurs :

Le produit vectoriel $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{W}$ est tel que :

- Le support de \vec{W} est **perpendiculaire au plan** (\vec{V}_1, \vec{V}_2) .
- Le sens de \vec{W} est tel que le trièdre $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{W})$ soit **direct**.
- La norme de \vec{W} a pour valeur

$$\|\vec{W}\| = \|\vec{V}_1\| \times \|\vec{V}_2\| \times |\sin(\vec{V}_1, \vec{V}_2)|.$$

Expression analytique :

$$\text{Si } \vec{V}_1 \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{V}_2 \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} \text{ alors } \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \begin{pmatrix} Y_1 \cdot Z_2 - Y_2 \cdot Z_1 \\ Z_1 \cdot X_2 - Z_2 \cdot X_1 \\ X_1 \cdot Y_2 - X_2 \cdot Y_1 \end{pmatrix}$$

Propriétés :

- Antisymétrie : $\vec{U} \wedge \vec{V} = -(\vec{V} \wedge \vec{U})$.
- Cas de nullité : $\vec{U} \wedge \vec{V} = 0$ si $\vec{U} = 0$ ou $\vec{V} = 0$ ou $(\vec{U}, \vec{V}) = 0 + k\pi$ (vecteurs colinéaires).
- Vecteurs d'une base orthonormée $\mathcal{B}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$: $\vec{x} \wedge \vec{x} = \vec{y} \wedge \vec{y} = \vec{z} \wedge \vec{z} = \vec{0}$
 $\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{z}$; $\vec{y} \wedge \vec{z} = \vec{x}$; $\vec{z} \wedge \vec{x} = \vec{y}$

