M5 : RdM (Résistance des Matériaux)

Résistance des Matériaux

Cours

1. Introduction, but de la RdM

La résistance des matériaux a trois objectifs principaux :

- la connaissance des caractéristiques mécaniques des matériaux (déformation et rupture sous l'effet d'une action mécanique),
- l'étude de la résistance à la rupture des pièces mécaniques,
- l'étude de la déformation des pièces mécaniques.

2. Hypothèse de la RdM, champ d'application

2-1) Le matériaux :

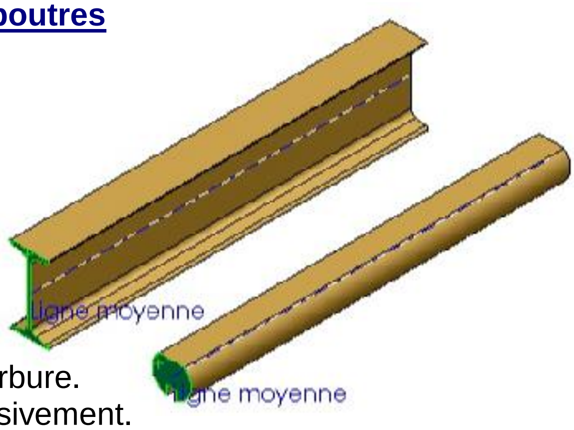
Il est **homogène** : Structure continue et identique dans toutes les directions. Cette hypothèse est fausse pour tous les matériaux granuleux ou fibreux : béton, pierre, bois, composites, ...

Il est **isotrope** : Même propriétés mécaniques dans toutes les directions.
Cette hypothèse est fausse pour tous les matériaux granuleux ou fibreux.

2-2) Cas des pièces pouvant être assimilées à des poutres

Disposition de la matière, définition d'une poutre :

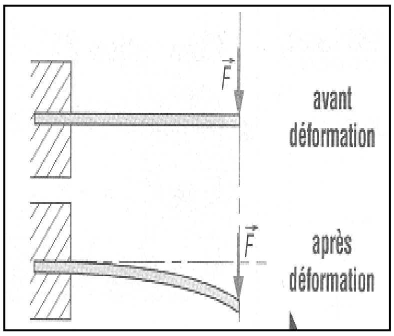
Poutre : on appelle *poutre* un solide engendré par une surface plane (S) dont le centre de surface G décrit une courbe plane (C) appelée *ligne moyenne*.



Les caractéristiques de la poutre sont :

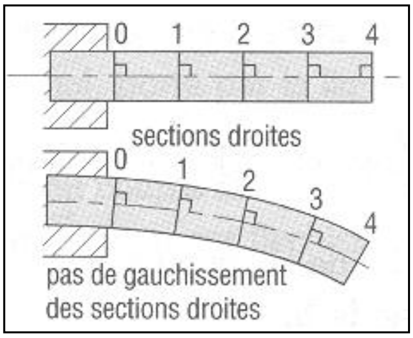
- Ligne moyenne droite ou à grand rayon de courbure.
- Section droite (S) constante ou variant progressivement.
- Grande longueur par rapport aux dimensions transversales.
- Existence d'un plan de symétrie.

Les déformations :



Les déformations étant petites devant les dimensions de la poutre, les actions s'exerçant sur celle-ci seront calculées à partir du principe fondamental de la statique.

Les supports des forces seront eux considérés comme constants.

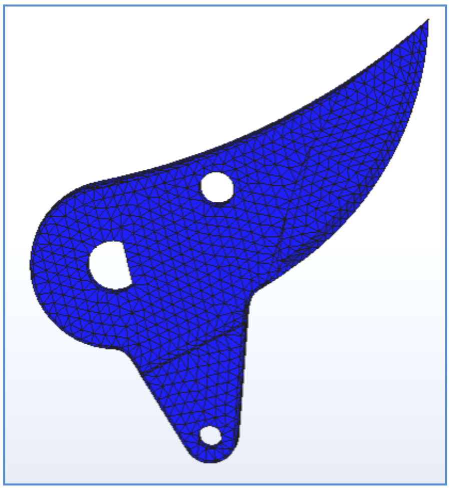


Navier & Bernoulli : Les sections planes normales aux fibres avant déformation demeurent planes et normales aux fibres après déformation.

Barré de St Venan : Les résultats obtenus par la RDM ne s'appliquent valablement qu'à une distance suffisamment éloignée de la région d'application des efforts concentrés.

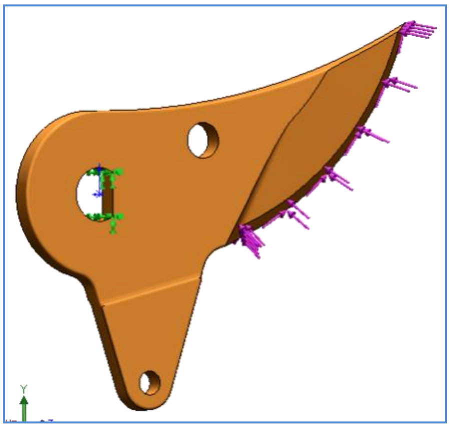
2-3) Cas des pièces ayant une forme complexe

Si la pièce n'est pas une poutre, alors il faut utiliser un logiciel effectuant les calculs par éléments finis.
Le principe est le suivant :
Exemple : lame mobile du sécateur



a) Maillage de la pièce,

La méthode des éléments finis repose sur un découpage de la pièce selon un maillage. D'habitude on choisit un maillage triangulaire mais rien n'interdit de choisir des maillages plus complexes. On peut resserrer le maillage près des endroits où l'on pense que la solution va beaucoup varier. Plus ce maillage est resserré, plus la solution que l'on obtient par la méthode des éléments finis sera précise.

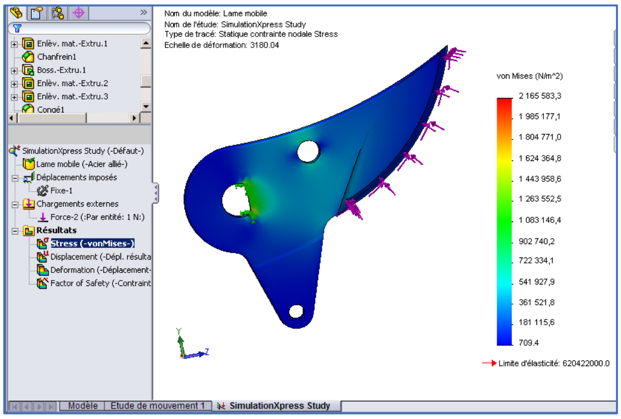


b) Définition des liaisons et du chargement

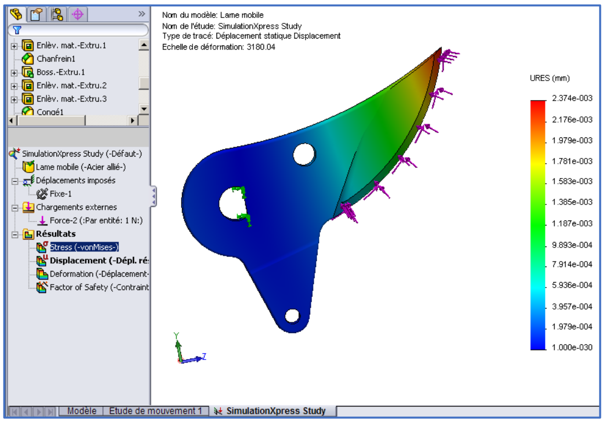
Il faut indiquer une surface considérée comme fixe et il faut modéliser les efforts s'appliquant sur la pièce

c) Interprétation des résultats.

Contraintes dans le matériau :



Déformations :

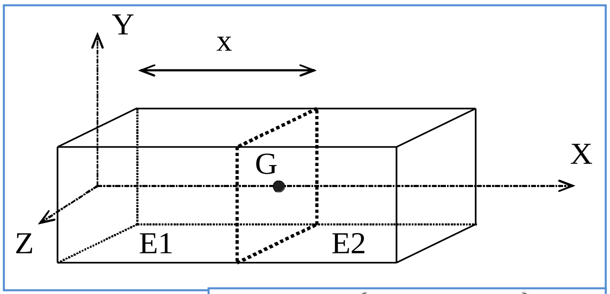


Attention : la notation scientifique est souvent utilisée pour afficher les résultats :

A savoir : e-003 = 10^{-3} *exemple* : 2.374e-003 = $2{,}374.10^{-3}$ = 0,002374
e 000 = 1
e+001 = 10
e+006 = 10^{6}

3. Efforts de cohésion

Pour étudier une poutre (E) en équilibre sous l'action de plusieurs forces extérieures, il faut modéliser ce qui se passe dans la matière. Pour cela, on réalise une **coupure fictive** de la poutre située à l'abscisse x qui la sépare en 2 tronçons E1 et E2.



Les efforts de cohésion traduisent les actions de contact de (E2) sur (E1). Ces efforts de cohésion permettent à la poutre de ne pas se "disloquer" sous l'effet d'actions extérieures.

On note les efforts de cohésion de la façon suivante :

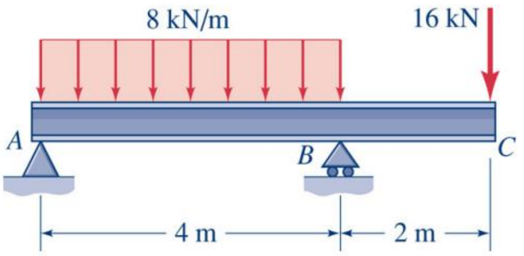
$$\{\mathrm{T}_{(cohésion)}\}_G = \begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}_{(G,x,y,z)}$$

Résultante		Moment	
$\vec{R} \begin{vmatrix} N \\ Ty \\ Tz \end{vmatrix}_R$	• **N : effort normal à la section (traction ou compression)** • **Ty et Tz : efforts tranchants (cisaillement)**	$\vec{M}_G \begin{vmatrix} Mt \\ Mfy \\ Mfz \end{vmatrix}_R$	• **M_T : moment de torsion** • **M_{fy} et M_{fz} : moments de flexion**

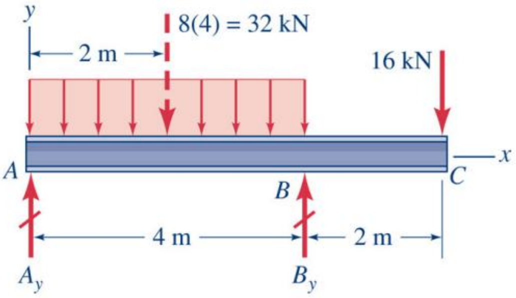
Diagramme des efforts intérieurs

L'objectif des diagrammes des efforts intérieurs est de représenter graphiquement les forces internes (telles que les efforts tranchants et les moments fléchissants) qui agissent à l'intérieur d'une structure, en fonction de la position le long de cette structure.
La démarche est la suivante :

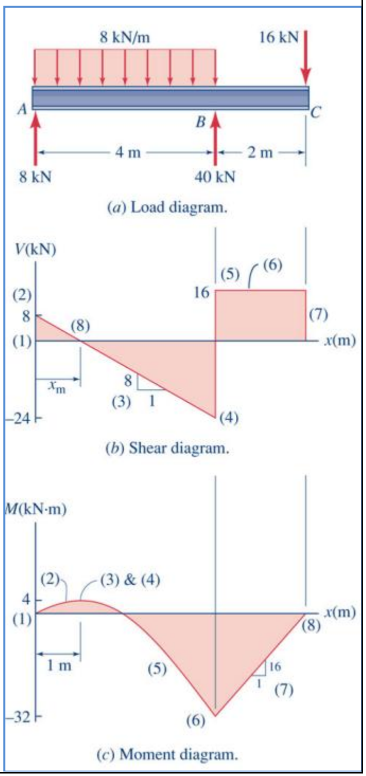
1) Identifier la structure étudiée et son chargement



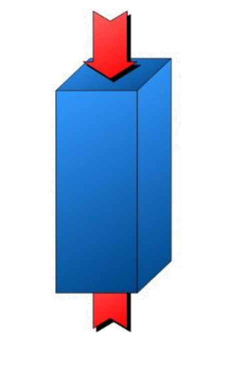
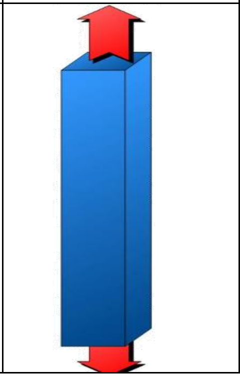
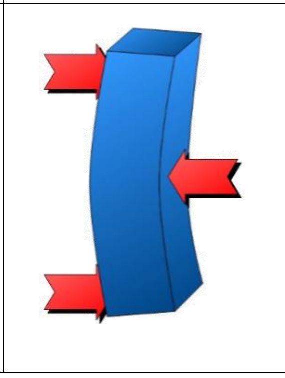
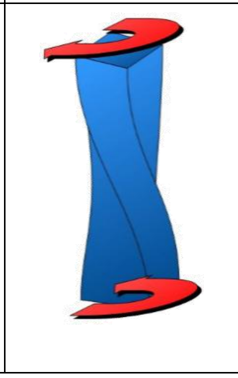
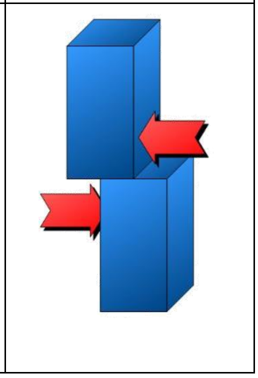
2) Calculer les réactions aux appuis en utilisant le PFS (Principe Fondamental de la Statique) aussi appelé « 1ère Loi de Newton ».



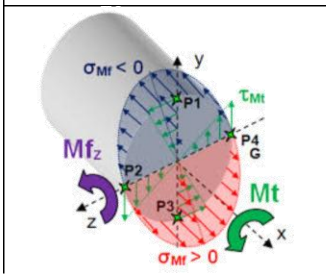
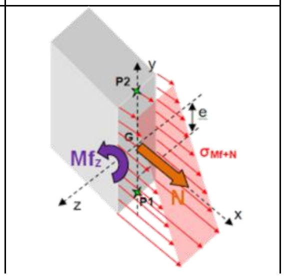
3) Tracer les diagrammes d'efforts tranchants et de moment fléchissant en les alignant verticalement les uns par rapport aux autres.



4. Sollicitations simples

Compression	Traction	Flexion	Torsion	Cisaillement
				

Exemples de sollicitations composées (association de plusieurs types de sollicitations simples).

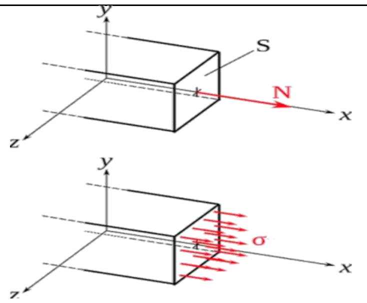
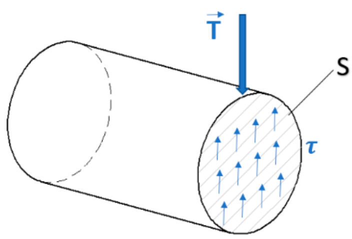
Torsion + flexion	Traction + flexion
	

5. Les contraintes mécaniques

Les **contraintes mécaniques** (ou tensions internes) désignent la répartition des forces internes par unité de surface dans un matériau soumis à une sollicitation extérieure (comme des forces, des moments ou des variations de température). Elles sont essentielles pour l'analyse du comportement d'un matériau ou d'une structure sous l'effet de charges et permettent de déterminer si le matériau pourra résister à ces sollicitations sans se déformer de manière irréversible ou se casser.

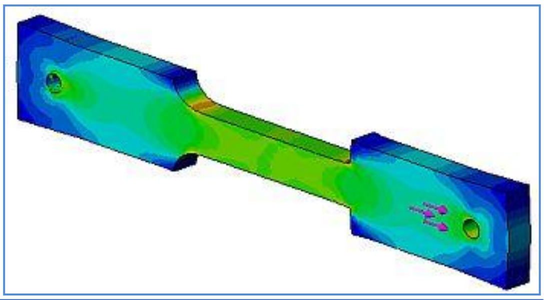
Les contraintes s'expriment en MPa (*rappel* : 1MPa = 10^6 Pa)

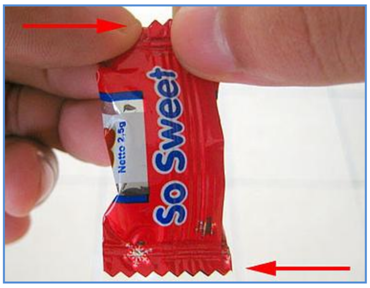
Il existe des contraintes normales et des contraintes tangentielles à la surface étudiée :

Contraintes normales	Contraintes tangentielles
	
$\sigma = \frac{N}{S}$ σ : contrainte normale (MPa) N : effort normal (N) S : surface (mm^2)	$\tau = \frac{T}{S}$ τ : contrainte tangentielle (MPa) T : force de cisaillement (N) S : surface (mm^2)

Concentrations de contraintes

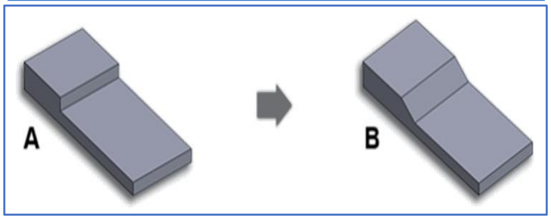
Les **concentrations de contraintes** surviennent lorsque la section d'une pièce varie de manière brutale : trou (perçage), rainure, épaulement, gorge, …





Ce phénomène est parfois voulu par exemple dans le cas des emballages.

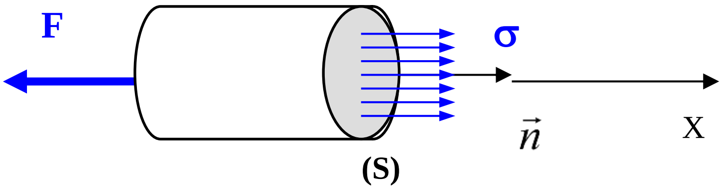
Pour limiter les concentrations de contraintes, il faut faire varier la géométrie des pièces progressivement.



6. Traction et compression

6-1) Détermination de la contrainte normale:

Quand une pièce est sollicitée à ses 2 extrémités par deux efforts F parallèles à l'axe longitudinal de la pièce, la répartition des contraintes dans la section (S) est uniforme et normale à la surface :



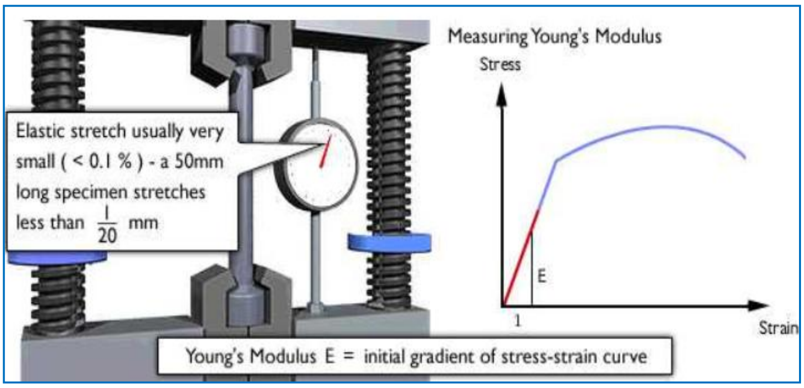
La contrainte normale de traction vaut :

$$\vec{\sigma} = \sigma.\vec{n} \quad \text{avec} \quad \boxed{\sigma = \frac{N}{S}}$$

$\sigma > 0$:	**Traction**	Les efforts extérieurs tendent à allonger la pièce
$\sigma < 0$:	**Compression**	Les efforts extérieurs tendent à raccourcir la pièce

6-2) Loi de Hooke :

Lorsqu'une pièce se déforme dans son domaine élastique, son allongement est proportionnel à la contrainte appliquée. « E » appelé Module d'Young correspond à la raideur du matériau.

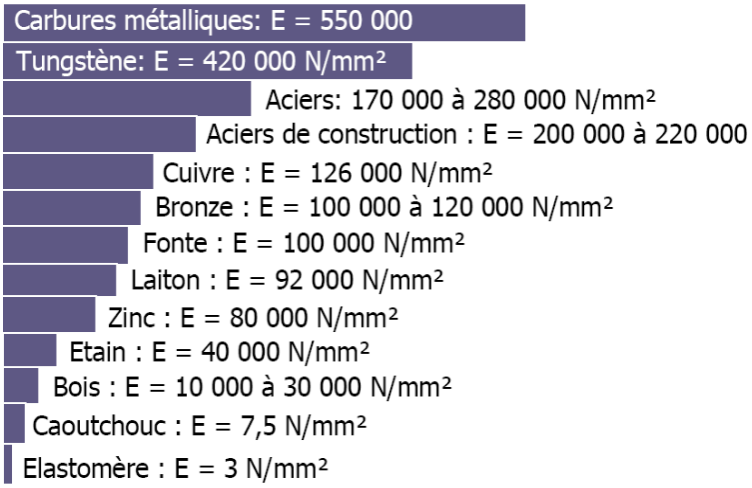


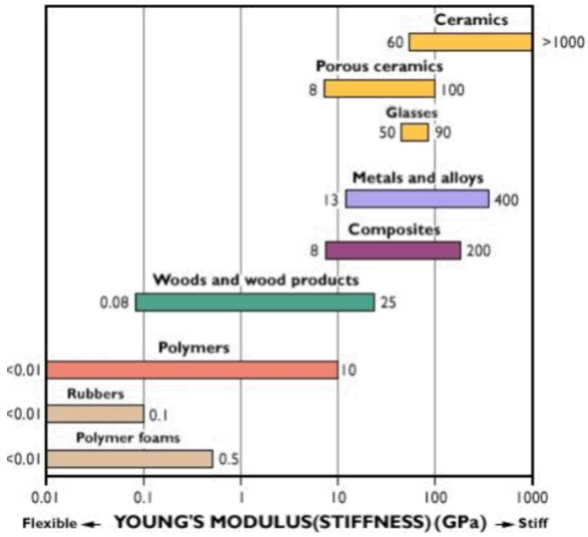
Loi de HOOKE :

$$\boxed{\sigma = E . \varepsilon}$$

Avec :

- σ : contrainte normale de traction (Mpa)
- E : Module d'élasticité longitudinal (Mpa)
- ε : allongement unitaire (déformation. par unité de longueur)





6-3) Expression de la déformation élastique :

L'allongement élastique ΔL d'une pièce en traction dépend de la force de traction N, de la section S et de la longueur au repos de la pièce L.

$$\boxed{\Delta L = \frac{F.L}{E.S}}$$

Avec :

- F : norme de la force (N)
- L : longueur au repos de la pièce (mm)
- E : module de Young (Mpa)
- S : aire de la section de la pièce (mm²)

6-4) Condition de résistance :

Pour qu'une pièce résiste aux efforts de traction sans subir de déformation permanente il faut que la contrainte interne ne dépasse pas la limite élastique Re (en MPa) du matériau.

Pour des raisons de sécurité et compte tenu des hypothèses faites avec les modélisations, la contrainte normale σ doit rester inférieure à une valeur limite appelée contrainte pratique à l'extension Rpe. On considère que c'est la contrainte maximale admissible.

$$Rpe = \frac{\mathrm{Re}}{s}$$

Avec s: coefficient de sécurité >1

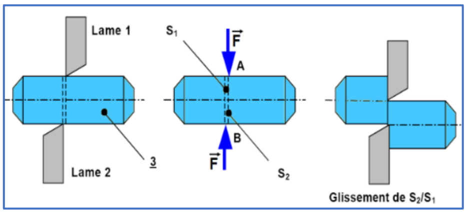
s = 1,5 à 3 pour des structures courantes.
s = 8 à 10 pour des structures présentant un danger pour l'homme et son environnement

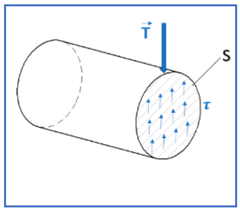
Condition de résistance : $\boxed{\sigma \leq Rpe}$

7. Sollicitation de CISAILLEMENT

7-1) Contrainte dans la section droite :

Les contraintes tangentielles $\vec{\tau}$ sont sensiblement uniformément réparties dans une section droite.





$$\boxed{\tau = \frac{T}{S}}$$

Avec :

- τ : contrainte tangentielle de cisaillement (MPa)
- T : norme de l'effort tranchant (N)
- S : aire de la section droite (mm²)

7-2) Condition de résistance :

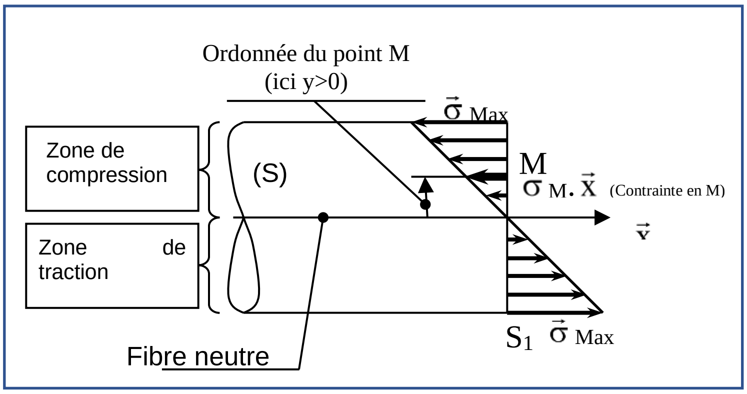
$$\boxed{\left|\tau_{moy}\right| \leq Rpg}$$

$$Rpg = \frac{Re\,g}{s}$$

- Reg : Résistance élastique au glissement (MPa)
- Rpg : Résistance pratique au glissement (MPa)
- s : coefficient de sécurité

Relations entre la résistance élastique à l'extension **Re** et la résistance élastique au glissement **Reg** :	
Matériaux	Relation entre Re et Reg
Aciers doux, alliages d'aluminium (Re ≤ 270 MPa)	Reg = 0,5 × Re
Aciers mi-durs (320≤ Re ≤ 520 MPa)	Reg = 0,7 × Re
Aciers durs, fontes (Re ≥ 600 MPa)	Reg = 0,8 × Re

8. Sollicitation de FLEXION simple



8-1) Contraintes :

Dans le cas de la flexion plane simple, les contraintes se réduisent essentiellement à des contraintes normales.

$$\boxed{\sigma = \frac{Mfz \bullet y}{I_{(G,\vec{z})}}}$$

Avec :

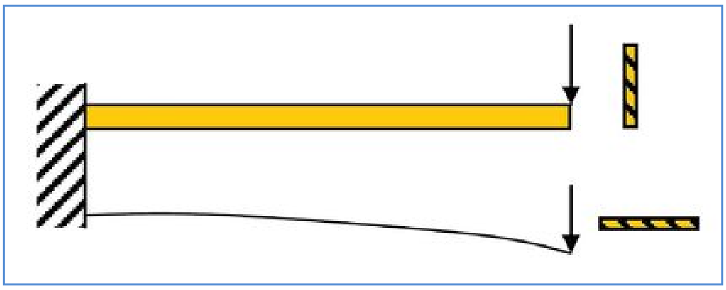
- **σ_M** : contrainte normale au point M due à la flexion (en MPa)
- **Mfz** : moment de flexion selon (G, $\vec{z}$) dans (S) (en N.mm)
- **I_{Gz}** : moment quadratique de la section droite (S) / à son axe neutre (en mm^4)
- **y** : ordonnée du point M dans (G, $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$) (en mm)

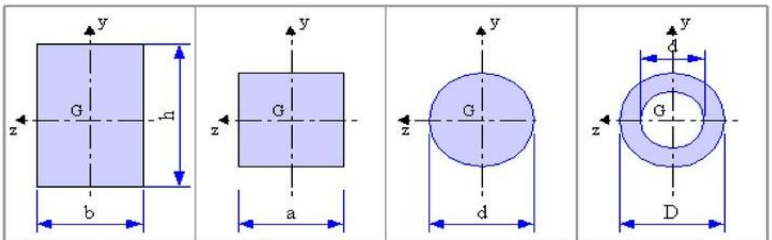
<u>Remarque :</u> *- La contrainte normale maximale se trouve sur le point le plus éloigné de l'axe neutre.*
- La condition de résistance en flexion est la même qu'en traction en prenant la valeur maximale de la contrainte.

8-2) Moment quadratique :

Le moment quadratique (mm^4) caractérise la raideur de la poutre au fléchissement.

<u>Exemple du réglet :</u>
Un réglet fléchira facilement s'il est à plat mais beaucoup moins s'il est sur la tranche.

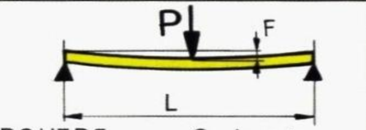
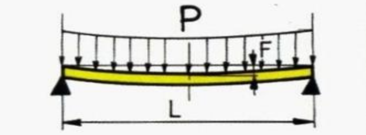
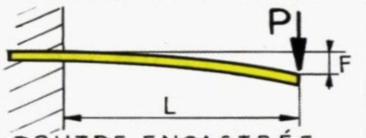




IGz (mm^4)	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi (D^4-d^4)}{64}$

Il est possible de calculer la flèche (déplacement maximal d'une poutre) en utilisant les formules suivantes.

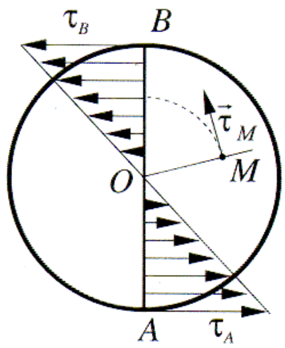
- E : module d'élasticité du matériau
- I : moment quadratique de la section
- L : longueur de la poutre
- P : charge appliquée sur la poutre

Disposition des charges	MOMENT FLÉCHISSANT EN Kg/mm	FLÈCHE MAXI EN M/M
 POUTRE sur 2 Appuis	$\frac{P \times L}{4}$	$\frac{P \times L^3}{48 \times E \times I}$
	$\frac{P \times L}{8}$	$\frac{5 \times P \times L^3}{384 \times E \times I}$ $\frac{P \times L}{8} \times \frac{5 \times L^2}{48 \times E \times I}$
 POUTRE ENCASTRÉE	$P \times L$	$\frac{P \times L^3}{3 \times E \times I}$

9. Sollicitation de TORSION

9-2) Contrainte dans la section droite :

La valeur de la contrainte tangentielle en un point M est proportionnelle à la distance de ce point au centre de la section. D'où la répartition des contraintes tangentielles dans la section droite :



Ce qui amène cette relation liant le rayon à la contrainte tangentielle :

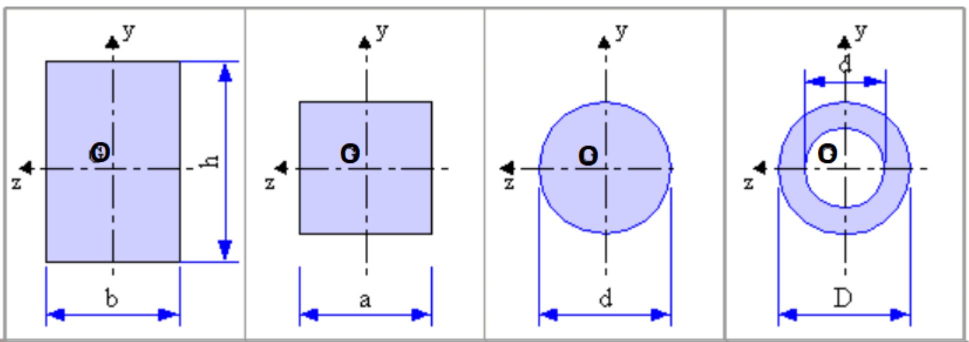
$$\boxed{\tau_M = G \cdot \theta \cdot \rho_M}$$

Avec :
- τ_M : Contrainte tangentielle dans le matériau. (Mpa)
- G : module d'élasticité transversale du matériau (ou module de Coulomb) (Mpa)
- ρ_M : rayon considéré pour l'analyse (mm)

Dans le domaine élastique, le moment de torsion Mt est proportionnel à l'angle unitaire de torsion θ.

$$\boxed{Mt = G.\theta.Io}$$

Avec :
- Mt : Moment de torsion (**N.mm**)
- G : Module d'élasticité transversale (**MPa**)
- θ : Angle unitaire de torsion (**rad/mm**)
- Io : Moment quadratique de (S) par rapport à (O, $\vec{x}$) (**mm⁴**)



I_0 (mm⁴)	$\frac{bh^3+hb^3}{12}$	$\frac{a^4}{6}$	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi (D^4-d^4)}{32}$