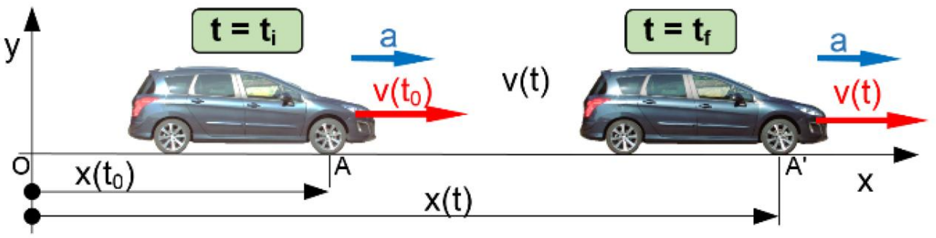
M2 : Cinématique

Equations du mouvement

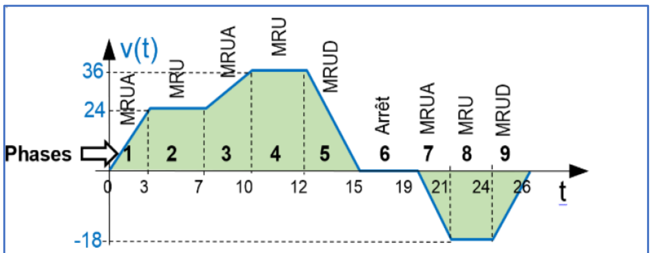


Le graphe des vitesses ci-contre illustre toutes les phases* possibles :

- Arrêt
- MRU (Mouvement Rectiligne Uniforme)
- MRUA (Mouvement Rectiligne Uniformément accéléré)
- MRUD (Mouvement Rectiligne Uniformément décéléré)
- (Marche avant / Marche arrière)

MRUV : Mouvement Rectiligne Uniformément Varié

*: il y a changement de phase lorsqu'il y a changement de nature du mouvement



MRU

$a(t) = a = 0$	m/s^2
$v(t) = v_0$ = constante	m/s
$x(t) = v_0 \cdot (t-t_0) + x_0$	m

Si $t_0=0$, $x_0=0$,

$a = 0$	m/s^2
$v(t) = v_0$	m/s
$x(t) = v_0 \cdot t$	m

MRUA (a>0) ou MRUD (a<0)

$a(t) = a$ = constante	m/s^2
$v(t) = a.(t-t_0) + v_0$	m/s
$x(t) = 0{,}5\, a.(t-t_0)^2 + v_0.(t-t_0) + x_0$	m

Si $t_0=0$, $x_0=0$, $v_0=0$

a = constante	m/s^2
$v(t) = a.t$	m/s
$x(t) = 0{,}5\, a.t^2$	m

La position **x**, la vitesse **v** et l'accélération **a** sont données à tout instant **t** par les équations de mouvement ci-contre, spécifiques à chaque phase. Notez bien les unités utilisées, et en outre, elles peuvent vous servir pour vérifier vos résultats.

Sur un MRUA, on utilisera également le calcul rapide de l'accélération :

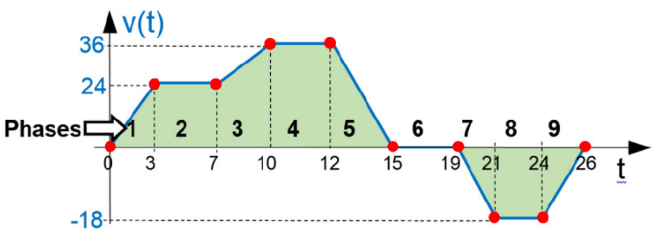
$$\boxed{a = \frac{v(t) - v_0}{t - t_0}}$$

a : $m.s^{-2}$; $v(t)$, v_0 : $m.s^{-1}$; t, t_0 : s

1) Les vitesses v(t) : Le plus facile, lecture sur le graphe :

1.1) Aux limites de phase, lecture directe :

- à t = 0 s : v(0) = 0
- à t = 3 s : v(3) = 24 $m.s^{-1}$
- à t = 7 s : v(7) = 24 $m.s^{-1}$
- à t = 10 s : v(10) = 36 $m.s^{-1}$
- à t = 12 s : v(12) = 36 $m.s^{-1}$
- à t = 15 s : v(15) = 0 $m.s^{-1}$
- à t = 19 s : v(19) = 0 $m.s^{-1}$
- à t = 21 s : v(21) = -18 $m.s^{-1}$
- à t = 24 s : v(24) = -18 $m.s^{-1}$
- à t = 26 s : v(26) = 0 $m.s^{-1}$

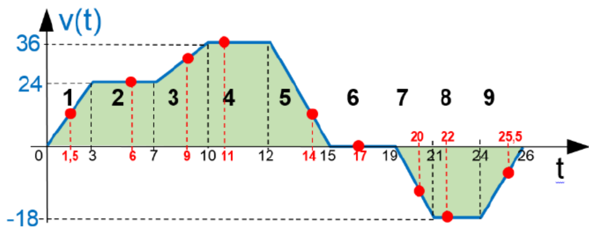


1.2) En cours de phase, lecture directe (MRU) ou ...

⇨ MRU : lecture directe

- à t = 6 s : $v_2(6)$ = 24 $m.s^{-1}$
- à t = 11 s : $v_4(11)$ = 36 $m.s^{-1}$
- à t = 17 s : $v_6(17)$ = 0 $m.s^{-1}$
- à t = 22 s : $v_4(22)$ = -18 $m.s^{-1}$

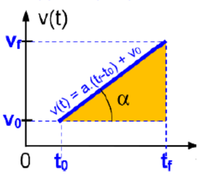
⇨ MRUV : la vitesse est proportionnelle à l'accélération qu'il faut calculer.
à t = 1,5 s, t = 9 s, t = 14 s, ... voyons comment calculer l'accélération.



2) Les accélérations a, variations (linéaires) de la vitesse

Mathématiquement, l'accélération est le taux de variation de la fonction vitesse soit, sa dérivée:

$v(t) = a.(t_f-t_0) + v_0$

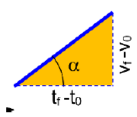


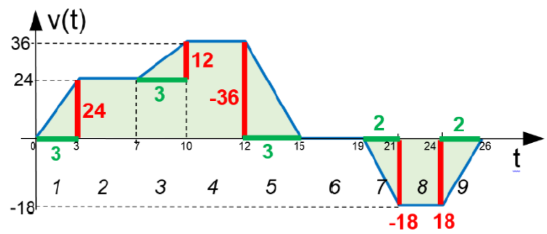
$$\boxed{a = \frac{v(t) - v_0}{t - t_0}}$$

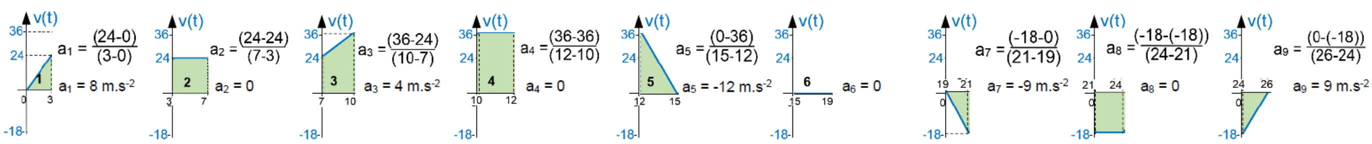
a : $m.s^{-2}$; $v(t)$, v_0 : $m.s^{-1}$; t, t_0 : s

a = coef. directeur :

$a = \tan \alpha = (v_f-v_0) / (t_f-t_0)$







M2 : Cinématique

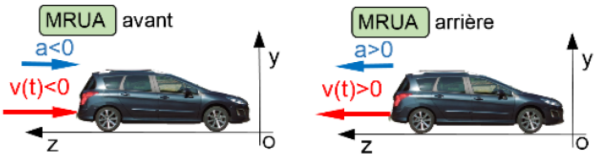
Equations du mouvement

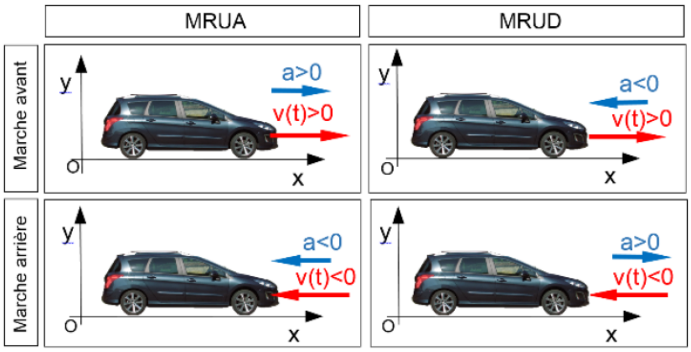
Cours

<u>Remarque 1</u> :
- MRUA ⇨ a>0
- MRUD ⇨ a<0

<u>Remarque 2</u> :
- a_7 <0 ⇨MRUA marche arrière
- a_9 >0 ⇨MRUD marche avant

<u>Remarque 3</u> : • Attention au repère !



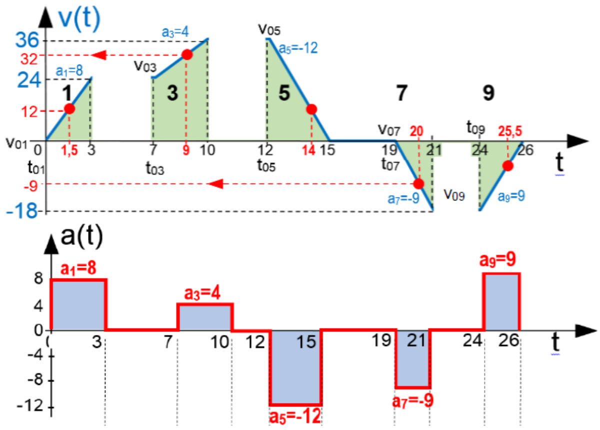


On peut ainsi calculer v(t=1,5), v(t=9), v(t=14), ...

$$\boxed{\overbrace{v(t)}^{m.s^{-1}}= \underbrace{a}_{m.s^{-2}}.(\underbrace{t}_{s} - t_0)+ \underbrace{v_0}_{m.s^{-1}}}$$

- à t = 1,5 s : $v_1(1,5) = a_1.(1,5 - t_{01}) + v_{01} = 8.(1,5-0)+ 0 = 12\ m.s^{-1}$
- à t = 9 s : $v_3(9) = a_3.(9-t_{03})+ v_{03} = 4.(9-7)+ 24 = 32\ m.s^{-1}$
- à t = 14 s : $v_5(14) = a_5.(14-t_{05})+ v_{05} = -12.(14-12)+ 36 = 12\ m.s^{-1}$
- à t = 20 s : $v_7(20) = a_7.(20-t_{07})+ v_{07} = -9.(20-19)+ 0 = -9\ m.s^{-1}$
- à t = 25,5 s : $v_9(25,5) = a_9.(25,5-t_{09})+ v_{09} = +9.(25,5-24) -18 = -4,5\ m.s^{-1}$

On peut éventuellement tracer le graphe des accélérations :

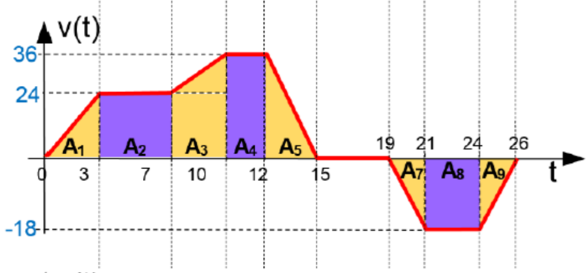


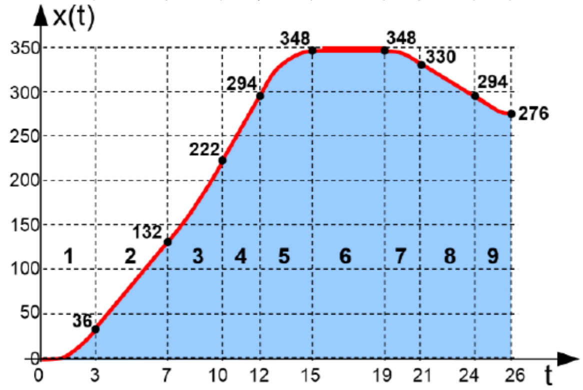
3) Les positions x(t)

Mathématiquement, de même que a(t) est la dérivée de la vitesse, v(t) est la dérivée de la position x(t). V(t) représente bien la variation de la position par rapport au temps (m/s) !!
Par conséquent, x(t) est une primitive de v(t) bornée entre l'instant (t_0) de départ et l'instant final (t_f) soit :

$v(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ ⇨ : $\boxed{x(t) = \int_{t_0}^{t_f} v(t).dt + x_0}$ Pour une phase donnée ($t_0 < t < t_f$)

la position x(t) correspond à l'aire sous la courbe v(t) entre les abscisses 0 et t_f.





$x_1(t) = \int_0^3 v_1(t).dt + x_{01} = A_1 + x_{01} = (3-0).24 / 2 + 0 = 36$ m

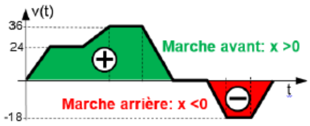
$x_2(t) = \int_3^7 v_2(t).dt + x_{02} = A_2 + x_{02} = (7-3).24 + 36 = 132$ m

$x_3(t) = \int_7^{10} v_3(t).dt + x_{03} = A_3 + x_{03} = (10-7).24 + (10-7).(36-24) / 2 + 132 = 222$ m

$x_4(t) = \int_{10}^{12} v_4(t).dt + x_{04} = A_4 + x_{04} = (12-10).36 + 222 = 294$ m

$x_5(t) = \int_{12}^{15} v_5(t).dt + x_{05} = A_5 + x_{05} = (15-12).36 / 2 + 294 = 348$ m

$x_6(t) = \int_{15}^{19} v_6(t).dt + x_{06} = A_6 + x_{06} = 0 + 348 = 348$ m



$x_7(t) = \int_{19}^{21} v_7(t).dt + x_{07} = A_7 + x_{07} = (21-19).(-18)/2 + 348 = 330$ m

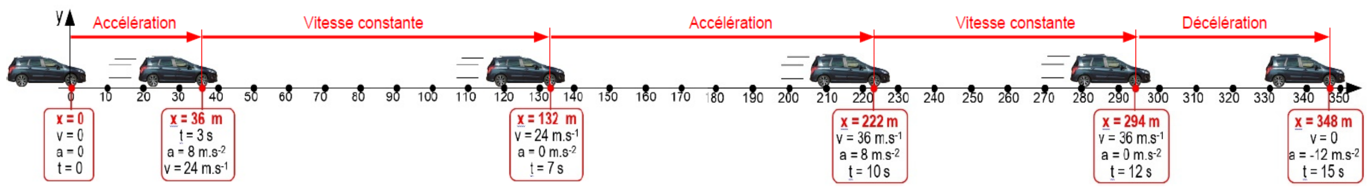
$x_8(t) = \int_{21}^{24} v_8(t).dt + x_{08} = A_8 + x_{08} = (24-21).(-18) + 330 = 294$ m

$x_9(t) = \int_{24}^{26} v_9(t).dt + x_{09} = A_9 + x_{09} = (26-24).(-18)/2 + 294 = 276$ m

Rq : phase 1⇨ $x(t)=0,5.a.(t-t_0)^2 = 0,5x8x(3-0)^2=36m$

$\boxed{x(t) = \frac{1}{2} a.(t-t_0)^2}$ m, m.s-2, s

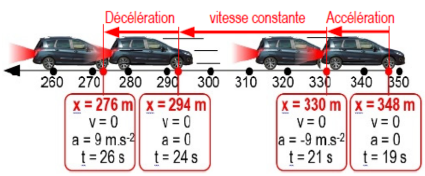
Aperçu du mouvement dans son ensemble :



Vitesse moyenne :
La vitesse moyenne se détermine par :

$\boxed{V_{moy} = \dfrac{x(t) - x_0}{t - t_0}}$ m.s-1, m, s

v = d / t soit, suivant les phases étudiées :



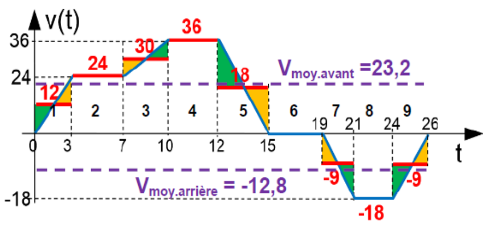
En marche avant, phases 1 à 5 : v_{moy} = [x(15) - x(0)] / [15 - 0] = 348/15 = 23,2 $m.s^{-1}$
En marche arrière, phases 7 à 9 : v_{moy} = [x(26) - x(19)] / [26 - 19] = [260-348] / 7 = -12,57 $m.s^{-1}$

Rq :On peut calculer la moyenne pondérée des vitesses moyennes ($\overline{v}$)pour n phases :

$\overline{V} = V_{moy} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\overline{V_i}.t_i}{t_f - t_0}$ soit en marche avant : $\overline{V}_{1\text{-}5} = \dfrac{\overline{V_1}.t_1 + \overline{V_2}.t_2 + \overline{V_3}.t_3 + \overline{V_4}.t_4 + \overline{V_5}.t_5}{t_f - t_0}$

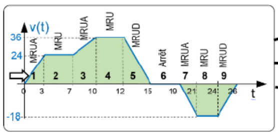
$= \dfrac{12x3+24x4+30x3+36x2+18x3}{15} = 23,2\ m.s^{-1}$

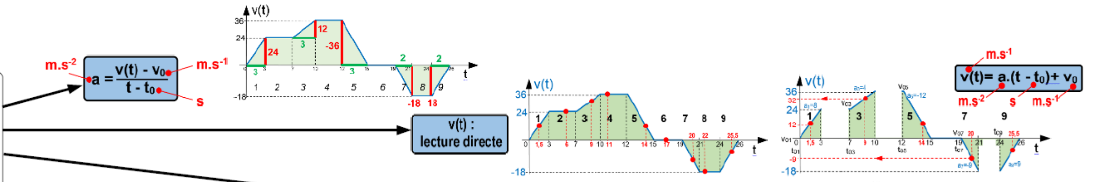
en marche arrière : $\overline{V}_{moy7\text{-}8} = \dfrac{\overline{V_7}.t_7 + \overline{V_8}.t_8 + \overline{V_9}.t_9}{t_f - t_0}$ $\dfrac{-9x2-18x3-9x2}{26-19}$ $= -12,8\ m.s^{-1}$

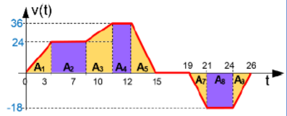


On notera que $\overline{V_i}.t_i = x_i$ aire sous la courbe.
Ex: phase 1⇨12 x 3 = 24 x 3 / 2

Résumé :

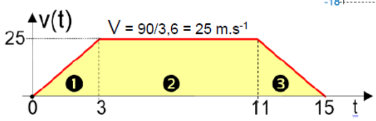






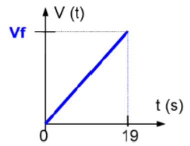
Construire le graphe des vitesses, exemples :

Un véhicule accélère de 0 à 90 km.h^{-1} en 3 secondes, puis roule à vitesse constante pendant 8 secondes puis freine et s'arrête en 4 secondes. L'accélération comme le freinage sont uniformes.



$$V_{m.s^{-1}} = \frac{V_{km.h^{-1}}}{3,6}$$

Une formule 1 effectue un 1000 m, départ arrêté, en 19 secondes dans un mouvement supposé rectiligne uniformément varié.



Une poulie motrice qui tournait à la fréquence de 955 tr/min s'arrête en 20 s dans un mouvement uniformément décéléré.