1. Actions mécaniques

Définition d'une action mécanique

On appelle action mécanique toute cause physique capable :

- de maintenir un solide en équilibre ;
- de déplacer un solide ou de modifier son mouvement ;
- de déformer un solide.

Une action mécanique a toujours une origine et une cible. On utilisera la notation i→j (action mécanique de i sur j).

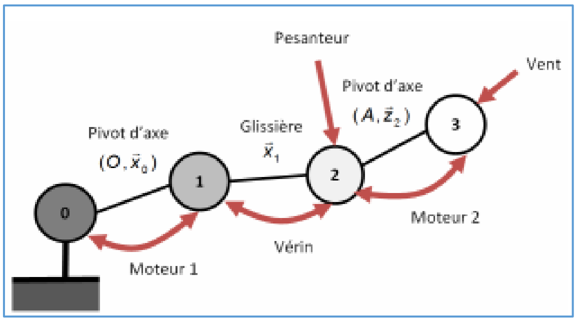
Les actions mécaniques qui s'exercent sur les solides peuvent être réparties en deux grandes catégories :

- les **actions mécaniques à distance** (champ de pesanteur, champ électromagnétique…) ;
- les **actions mécaniques de contact** exercées par un solide sur un autre par l'intermédiaire de leurs surfaces de contact.

Recenser les actions mécaniques :

Graphe d'analyse ou graphe de structure

Lorsque l'on ajoute, sur le graphe des liaisons d'un mécanisme, les actions mécaniques extérieures qui s'exercent sur ce mécanisme, le graphe change alors de nom pour s'appeler graphe d'analyse ou graphe de structure.

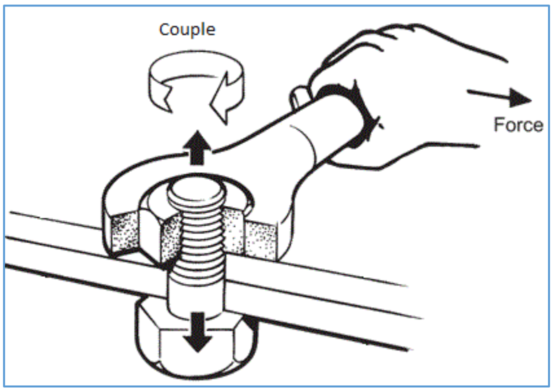


2. Modélisation des actions mécaniques

Forces et moments

Les actions mécaniques peuvent être :

- des forces (efforts), exprimées en newtons (N) qui ont pour conséquence de pousser ou tirer l'un des solide par rapport l'autre selon un axe ;
- des moments (couples), exprimés en newtons·mètre (N · m) qui ont pour conséquence de tourner ou tordre l'un des solides par rapport à l'autre, autour d'un axe.



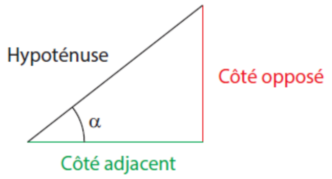
Les forces et les moments sont modélisables par des vecteurs, ils ont donc :

- un point d'application,
- un support,
- un sens,
- une norme (en N pour les forces, et en N · m pour les moments).

Projection d'un vecteur dans un repère

Pour connaître les composantes d'un vecteur dans un repère, il faut projeter le vecteur dans le repère.

Formules de trigonométrie à connaitre.



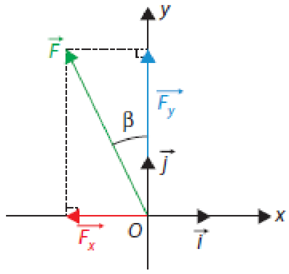
$$\sin\alpha = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Côté adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\text{Côté opposé}}{\text{Côté adjacent}}$$

Soit un vecteur $\vec{F}$ dont on souhaite connaître les composantes sur les axes x et y. En utilisant les formules précédentes, on obtient :

$$\vec{F_x} = -F\cdot\sin\beta\cdot\vec{i}$$
$$\vec{F_y} = +F\cdot\cos\beta\cdot\vec{j}$$
$$\vec{F_z} = \vec{0}$$



On met un signe « + » si la composante va dans le même sens que l'axe et un signe « – » dans le cas contraire.
Les résultats peuvent être notés sous la forme :

$$\vec{F} : \left| \begin{array}{l} -F\cdot\sin\beta \\ +F\cdot\cos\beta \\ 0 \end{array} \right.$$

Pour connaitre la norme d'un vecteur connaissant ses composantes, il faut utiliser le théorème de Pythagore :

$$\boxed{F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}$$

Modélisation d'une action mécanique par un torseur :

Les composantes d'une action mécanique peuvent être exprimées dans un **torseur**. C'est un outil mathématique qui permet de faire des calculs sur des champs vectoriels.

Exemple : si on considère deux personnes faisant un bras de fer, l'action du joueur (1) sur le joueur (2) est composée d'une force $\overrightarrow{R_{1\to2}}$ (pousser la main de l'adversaire), appelée résultante du torseur, et d'un moment $\overrightarrow{M_{A\,1\to2}}$ (faire pivoter la main de l'adversaire). Les composantes de ces deux vecteurs sont placées en colonne dans le torseur :

$$\{\tau_{1\to2}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{1\to2}} \\ \overrightarrow{M_{A\,1\to2}} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{cc} X_{1\to2} & L_{A\,1\to2} \\ Y_{1\to2} & M_{A\,1\to2} \\ Z_{1\to2} & N_{A\,1\to2} \end{array} \right\}_A$$

Point de réduction du torseur

Point de réduction du torseur

Remarque : on utilise le terme de « résultante » car le modèle résulte de la somme de toutes les actions mécaniques entre les deux solides (exemple : résultante du poids, exprimée au centre de gravité du solide)

Lorsque l'on a besoin d'exprimer le torseur en un autre point, seul le moment du torseur change

$$\boxed{\overrightarrow{M_{B\,1\to2}} = \overrightarrow{M_{A\,1\to2}} + \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{R_{1\to2}}}$$

> ***Remarque :*** le produit vectoriel peut se notes « ∧ » ou « x ».
> ***Attention***à ne pas confondre produit vectoriel et produit scalaire

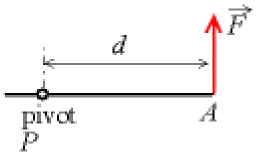
Attention : le produit vectoriel est prioritaire sur l'addition

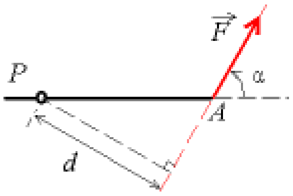
Méthode : calcul d'un produit vectoriel

Soit : $\overrightarrow{BA} : \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{R_{1\to2}} : \begin{vmatrix} X_{1\to2} \\ Y_{1\to2} \\ Z_{1\to2} \end{vmatrix}$ alors $\boxed{\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{R_{1\to2}} = \begin{vmatrix} b.Z_{1\to2} - c.Y_{1\to2} \\ c.X_{1\to2} - a.Z_{1\to2} \\ a.Y_{1\to2} - b.X_{1\to2} \end{vmatrix}}$

3. Calcul d'un moment (ou couple)

Le moment d'une force par rapport à un point est égal au produit de l'intensité de la force par la distance d entre le support de la force et le point considéré (d= ***bras de levier*** ; d est perpendiculaire au support de la force et passe par le point considéré).

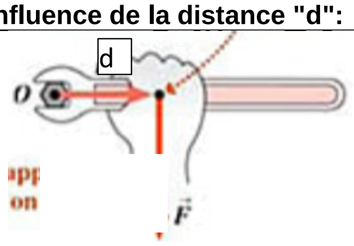


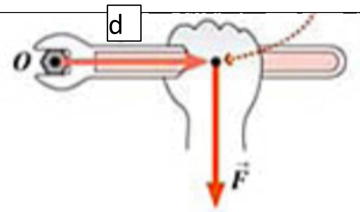


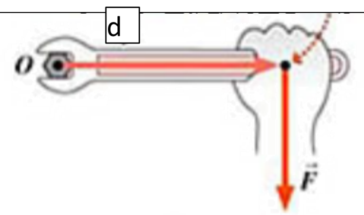
Moment = force x bras de levier

Nm N m

Influence de la distance "d":

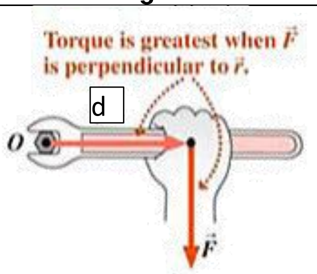


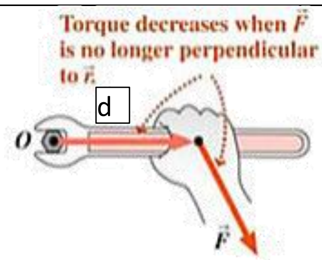


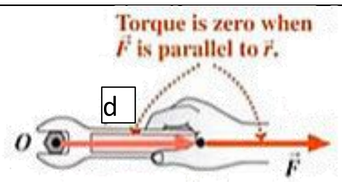


Conclusion: plus la distance d augmente et plus l'intensité du moment augmente

Influence de l'angle entre le support de la force et "d":

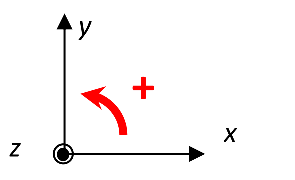
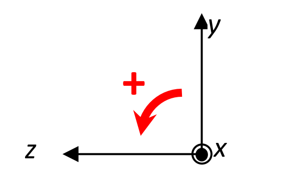
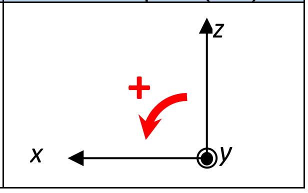




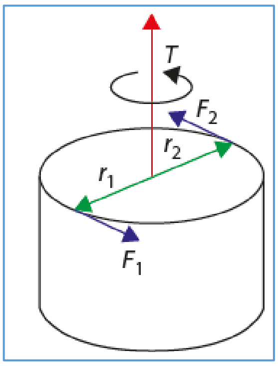


Conclusion: plus l'angle se rapproche de 90°, plus l'intensité du moment augmente

Le signe du moment algébrique dépend du sens de rotation de la force autour du point considéré. Le sens trigonométrique est généralement choisi comme sens positif.

Dans le plan (*x*, *y*)	Dans le plan (*y*, *z*)	Dans le plan (*x*, *z*)
		

Calcul d'un couple



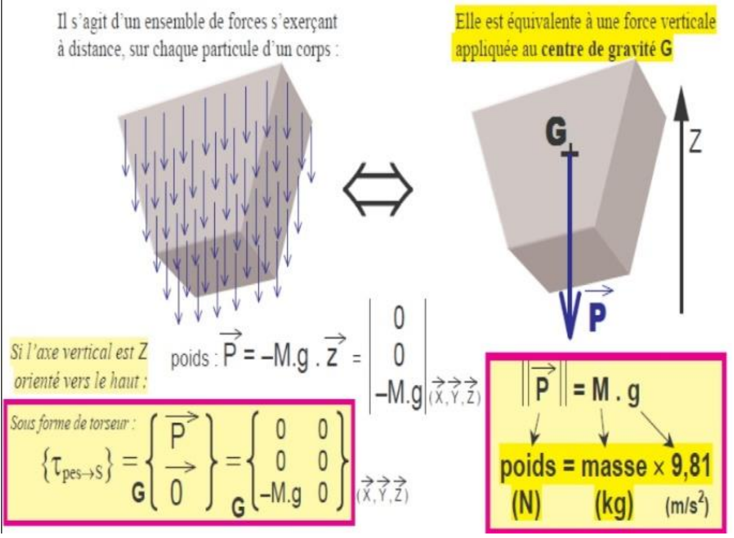
Le couple (exemple : couple-moteur) est causé par un ensemble de forces dont la somme vectorielle est nulle. Il s'exprime en newtons-mètres (N.m).

Exemple →

$$\vec{F_1}+\vec{F_2}=\vec{0}$$

$$T = F_1 \times r_1 + F_2 \times r_2$$

4. Exemples d'actions mécaniques :

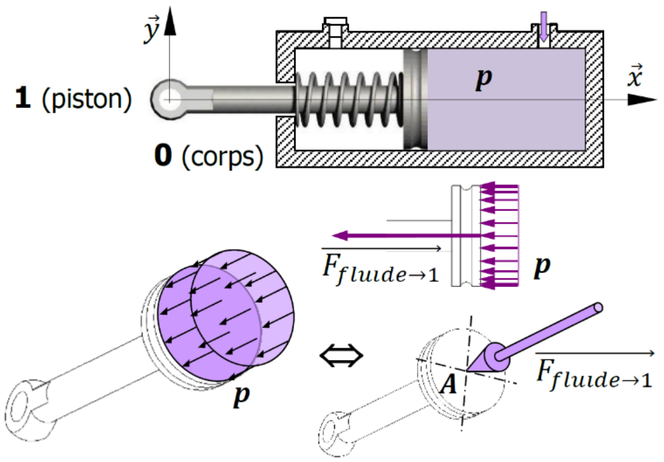
Les forces peuvent s'appliquer sur un volume (cas des actions à distance) : • action électrostatique • action magnétique • action gravitationnelle (poids) **<u>Action de la pesanteur (poids)</u>** Action de la pesanteur : elle s'exerce en tout point du solide. Elle est modélisable par une force au centre de gravité du solide. Cette force est verticale et dirigée vers le bas. A la surface de la terre, g=9,81m.s^{-2}	Exemple : 

Une force peut être répartie de façon homogène sur une surface
Elle peut alors être modélisée par une résultante au centre géométrique de la surface.

Force = Pression x surface

Attention aux unités: 1 bar = 10^5Pa

$$\{\tau_{fluide\to 1}\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{F_{fluide\to 1}} \\ \overrightarrow{M_{A\,1\to 2}} \end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} -pression \times surface & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_A$$

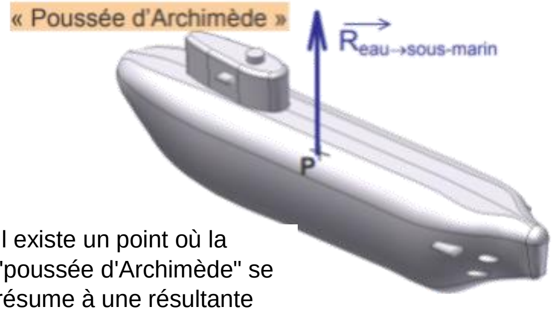


<u>La poussée d'Archimède</u> est la force particulière que subit un corps plongé en tout ou en partie dans un fluide (liquide ou gaz) soumis à un champ de gravité.

« Tout corps plongé dans un fluide au repos, entièrement mouillé par celui-ci ou traversant sa surface libre, subit une force verticale, dirigée de bas en haut et opposée au poids du volume de fluide déplacé ; cette force est appelée poussée d'Archimède. »

$$F = \rho l \cdot Vd \cdot g$$

F : Poussée d'Archimède ; ρl : masse volumique ; Vd : volume déplacé ; g : accélération de la pesanteur

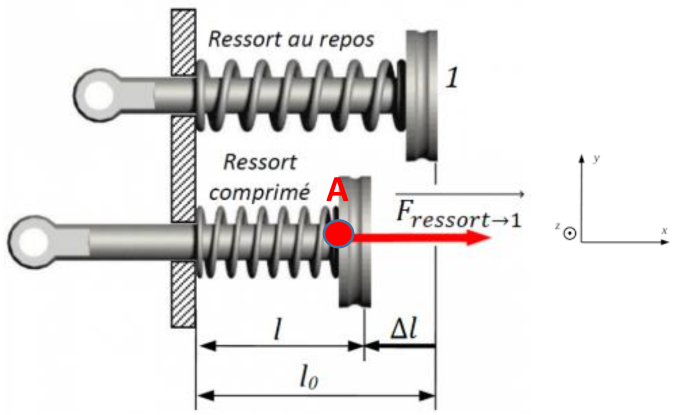


Il existe un point où la "poussée d'Archimède" se résume à une résultante seule (et un moment nul): le "centre de poussée" P

L'effort généré par le ressort comprimé sur la pièce 1 est égal à la raideur du ressort (en N.m^{-1}) multiplié par l'écrasement Δl.

$$\{\tau_{ressort\to 1}\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{F_{ressort\to 1}} \\ \overrightarrow{M_{A\,1\to 2}} \end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} k \times \Delta l & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_A$$

K : raideur du ressort (en N.m^{-1})
Δl : écrasement du ressort (en m)



5. 1ère loi de Newton ou Principe Fondamental de la statique (PFS) ou loi d'inertie

Dans un référentiel galiléen, si la somme des forces extérieures exercées sur un point matériel est nulle alors :

- soit ce point est au repos, c'est-à-dire que sa vitesse est nulle
- soit le point a un mouvement rectiligne uniforme, donc sa vitesse est constante

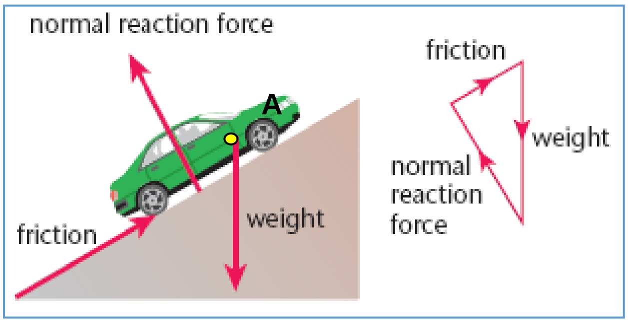
Si un solide S est en équilibre ou se déplace en ligne droite à vitesse constante alors:

$\sum \overrightarrow{\mathbf{F}_{(\mathbf{ext}\to\mathbf{S})}} = \vec{0}$ (Théorème de la résultante)

$\sum \overrightarrow{\mathbf{M}_{\mathbf{A}(\mathbf{F}(\mathbf{ext}\to\mathbf{S})}} = \vec{0}$ (Théorème du moment résultant)

Exemple : une voiture reste immobile dans une pente (ou se délace, en ligne droite, à vitesse constante) tant que la somme vectorielle des 3 résultantes (poids, frottement, réaction du sol) est nulle

La somme vectorielle des moments, tous exprimé par rapport au même point (par exemple A), est nulle.



L'écriture sous forme de torseurs peut être utilisée:

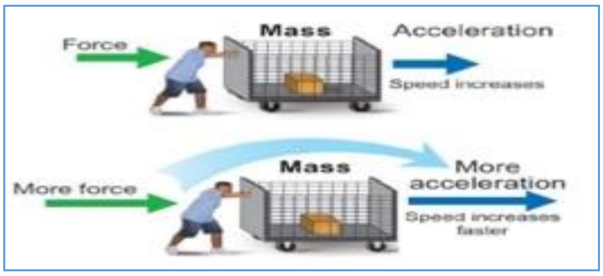
$$\begin{Bmatrix} X_1 & L_1 \\ Y_1 & M_1 \\ Z_1 & N_1 \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} X_2 & L_2 \\ Y_2 & M_2 \\ Z_2 & N_2 \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} X_3 & L_3 \\ Y_3 & M_3 \\ Z_3 & N_3 \end{Bmatrix}_A + \ldots + \begin{Bmatrix} X_n & L_n \\ Y_n & M_n \\ Z_n & N_n \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$$

Cela permet d'obtenir un système de 6 équations :

- $X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n = 0$
- $Y_1 + Y_2 + Y_3 + \ldots + Y_n = 0$
- $Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots + Z_n = 0$
- $L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_n = 0$
- $M_1 + M_2 + M_3 + \ldots + M_n = 0$
- $N_1 + N_2 + N_3 + \ldots + N_n = 0$

6. 2ème loi de Newton = Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

L'accélération subie par un corps, de masse m, dans un référentiel galiléen est proportionnelle à la résultante des forces qu'il subit, et inversement proportionnelle à sa masse m.



Solide ayant un mouvement de translation rectiligne

Pour un solide S, de masse m:

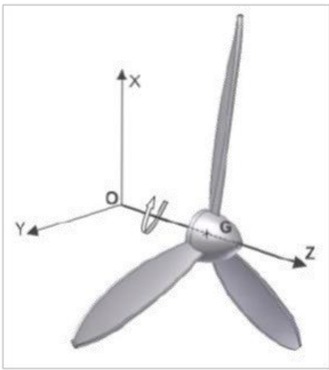
$$\sum \overrightarrow{\mathbf{F}_{(ext \to S)}} = \mathbf{m} \times \overrightarrow{\mathbf{a_G}}$$ (Théorème de la résultante)

$$\sum \overrightarrow{\mathbf{M}_{A(F(ext \to S))}} = \vec{\mathbf{0}}$$ (Théorème du moment résultant)

avec:

- $\sum \overrightarrow{\mathbf{F}_{(ext \to S)}}$: résultante des actions mécaniques extérieures exercées sur le solide S (en N)
- $\mathbf{m}$: masse du solide (en kg)
- $\overrightarrow{\mathbf{a_G}}$: vecteur accélération du centre de gravité G du solide S, dans le repère R (en m/s²)
- $\sum \overrightarrow{\mathbf{M}_{A(F(ext \to S))}}$:moment résultant, en A, des actions mécaniques extérieures exercées sur le solide S (en N.m)

Solide ayant un mouvement de rotation autour d'un axe fixe



Nous considérerons, par hypothèse, que le solide S possède un axe de symétrie au niveau de la géométrie des masses.

Le centre de gravité G est donc situé sur l'axe de rotation (O,z)

$$\sum \overrightarrow{\mathbf{F}_{(ext \to S)}} = \vec{\mathbf{0}}$$ (Théorème de la résultante)

$$\sum \overrightarrow{\mathbf{M}_{A(F(ext \to S))}} = \mathbf{J_{oz}} \times \frac{\mathbf{d^2\theta}}{\mathbf{dt^2}} \times \vec{z}$$ (Théorème du moment résultant)

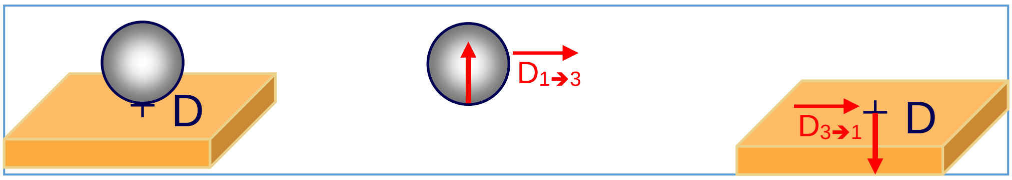
avec:

- $\sum \overrightarrow{\mathbf{F}_{(ext \to S)}}$: résultante des actions mécaniques extérieures exercées sur le solide S (en N)
- $\sum \overrightarrow{\mathbf{M}_{A(F(ext \to S))}}$:moment résultant, en A, des actions mécaniques extérieures exercées sur le solide S (en N.m)
- $\mathbf{J_{oz}}$: moment d'inertie du solide S autour de l'axe Oz (en kg.m²)
- $\frac{\mathbf{d^2\theta}}{\mathbf{dt^2}}$: accélération angulaire du solide S (en rad/s²). Peut aussi être notée $\ddot{\theta}$ ou $\dot{\omega}$

7. 3ème loi de Newton = Principe des actions mutuelles = loi de l'action et réaction

Tout corps A exerçant une force sur un corps B subit une force d'intensité égale, de même direction mais de sens opposé, exercée par le corps B.

Les actions mécaniques dans une liaison peuvent s'exprimer de deux façons suivant que l'on isole l'un ou l'autre des deux solides.



Ces deux actions mécaniques représentent la même chose. La différence réside dans le sens des vecteurs. Ils sont opposés.

$$\boxed{\overrightarrow{D_{1\to3}} = -\overrightarrow{D_{3\to1}}}$$

Si le torseur modélisant l'action de (1) sur (2), en A, est : ${}_A\{\tau_{1\to2}\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{1\to2}} \\ \overrightarrow{M_{A\,1\to2}}\end{matrix}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix}X & L \\ Y & M \\ Z & N\end{matrix}\right\}$

alors le torseur de l'action de (2) sur (1) en A est :

$${}_A\{\tau_{2\to1}\} = -\ {}_A\{\tau_{1\to2}\} = {}_A\left\{\begin{matrix}-\overrightarrow{R_{1\to2}} \\ -\overrightarrow{M_{A\,1\to2}}\end{matrix}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix}-X & -L \\ -Y & -M \\ -Z & -N\end{matrix}\right\}$$

8. Conditions nécessaires pour pouvoir poser l'hypothèse d'une modélisation plane

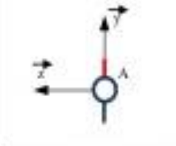
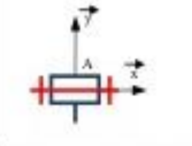
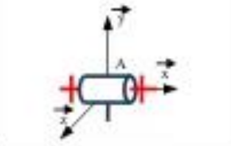
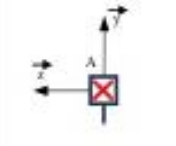
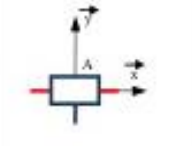
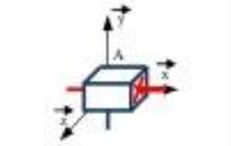
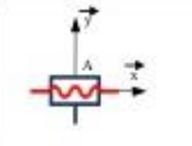
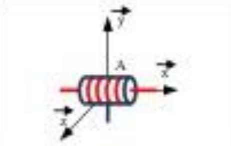
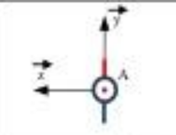
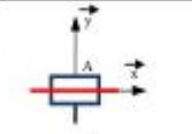
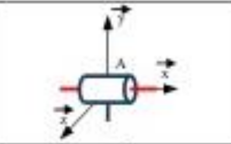
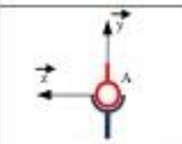
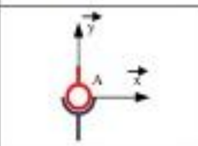
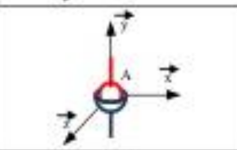
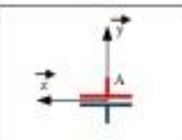
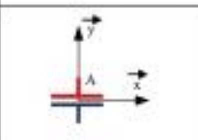
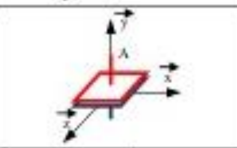
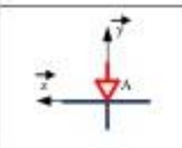
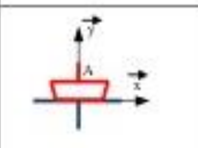
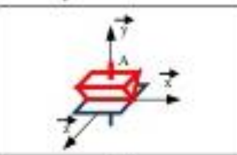
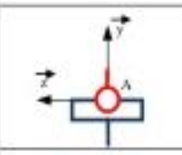
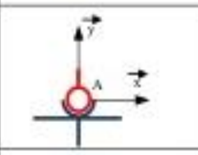
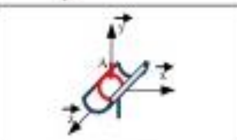
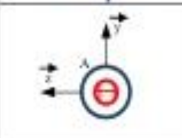
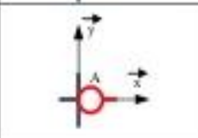
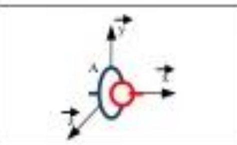
On considérera qu'un problème est plan si :

- Le système étudié est géométriquement symétrique par rapport au plan d'étude,
- Les forces extérieures au système sont contenues dans le plan ou sont symétriques par rapport au plan
- Les moments extérieurs sont orthogonaux au plan d'étude.

Si l'étude se fait dans le plan (x, y), alors les efforts transmissibles sont sur x et y et les moments transmissibles sont sur z.

9. Efforts transmissibles dans les liaisons

Les liaisons mécaniques entre les pièces d'un mécanisme permettent de déterminer la forme du torseur d'efforts transmissibles entre les pièces. Le tableau ci-dessous récapitule ces torseurs.

Caractérisation de la liaison	Degrés de liberté	Schématisation plane : Coté	Schématisation plane : Face	Schématisation spatiale	Composantes de la force (X, Y, Z) et du moment (L, M, N) transmissibles par la liaison
Encastrement de centre A	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$				${}_A\left\{\begin{matrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{matrix}\right\}_R$
Pivot d'axe $(A,\vec{x})$	$\begin{bmatrix} 0 & Rx \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$				${}_A\left\{\begin{matrix} X_A & 0 \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{matrix}\right\}_R$
Glissière d'axe $(A,\vec{x})$	$\begin{bmatrix} Tx & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$				${}_A\left\{\begin{matrix} 0 & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{matrix}\right\}_R$
Hélicoïdale d'axe $(A,\vec{x})$	$\begin{bmatrix} Tx \rightarrow & Rx \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$				${}_A\left\{\begin{matrix} X_A \rightarrow & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{matrix}\right\}_R$
Pivot glissant d'axe $(A,\vec{x})$	$\begin{bmatrix} Tx & Rx \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$				${}_A\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{matrix}\right\}_R$
Rotule de centre A	$\begin{bmatrix} 0 & Rx \\ 0 & Ry \\ 0 & Rz \end{bmatrix}$				${}_A\left\{\begin{matrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{matrix}\right\}_R$
Appui plan de normale $(A,\vec{y})$	$\begin{bmatrix} Tx & 0 \\ 0 & Ry \\ Tz & 0 \end{bmatrix}$				${}_A\left\{\begin{matrix} 0 & L_A \\ Y_A & 0 \\ 0 & N_A \end{matrix}\right\}_R$
Linéaire rectiligne (ou cylindre plan) de normale $(A,\vec{y})$, d'axe $(A,\vec{x})$	$\begin{bmatrix} Tx & Rx \\ 0 & Ry \\ Tz & 0 \end{bmatrix}$				${}_A\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & N_A \end{matrix}\right\}_R$
Linéaire annulaire (ou sphère cylindre) d'axe $(A,\vec{x})$	$\begin{bmatrix} 0 & Rx \\ 0 & Ry \\ Tz & Rz \end{bmatrix}$				${}_A\left\{\begin{matrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_R$
Ponctuelle (ou sphère plan) de normale $(A,\vec{x})$	$\begin{bmatrix} 0 & Rx \\ Ty & Ry \\ Tz & Rz \end{bmatrix}$				${}_A\left\{\begin{matrix} X_A & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_R$