

1. Identification d'un système du 1^{er} ordre

Equation mathématique d'un 1^{er} ordre

On peut toujours mettre l'équation d'un premier ordre sous la forme :

$$K \cdot e(t) = s(t) + \tau \frac{ds(t)}{dt}$$

Avec :

τ : La **constante de temps** du système.

K : Le **gain statique** du système. C'est le rapport entre la sortie et l'entrée quand toutes les grandeurs sont stables. (Ni l'entrée, ni la sortie ne varie.)

$$K \cdot e(t) = s(t) + \tau \frac{ds(t)}{dt} \quad \mathbf{K} = \frac{\text{Valeur de la sortie quand le système est stable (plus de variation)}}{\text{Valeur de l'entrée quand le système est stable (plus de variation)}}$$

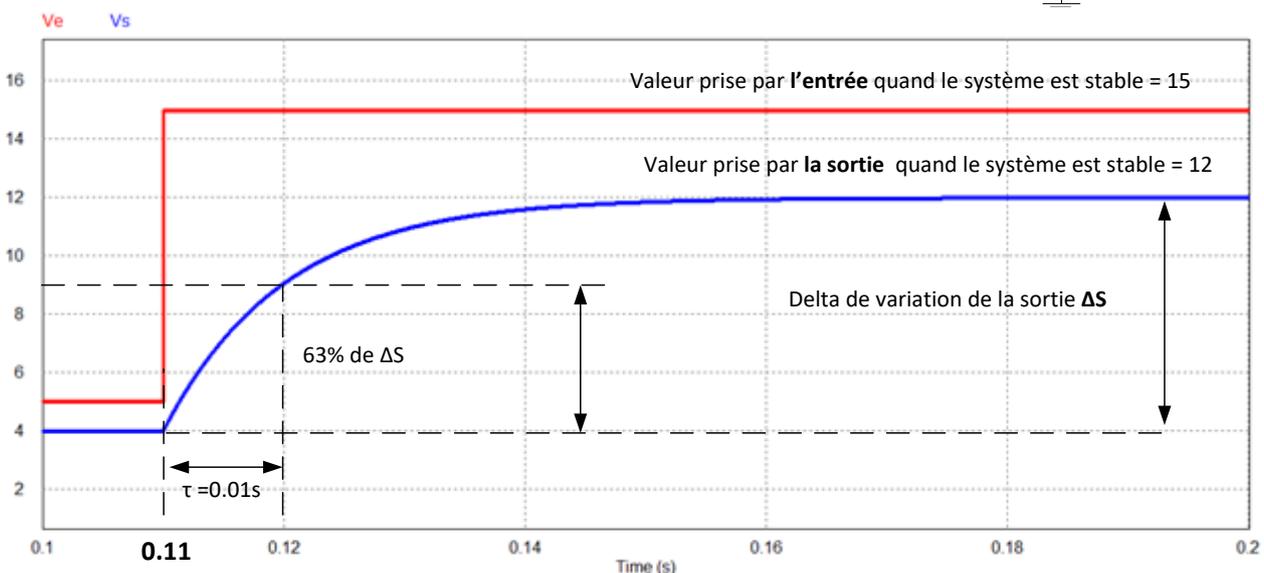
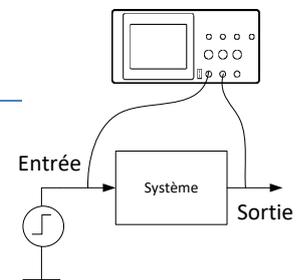
Si $e(t)$ est un échelon d'amplitude ΔE appliqué à l'instant $t=0s$, l'équation temporelle de $s(t)$ devient :

$$s(t) = \Delta E \cdot K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + S_0$$

Avec S_0 , la valeur de $s(t)$ avant l'échelon.

Méthode d'identification

On considère un système du 1^{er} ordre sur lequel on impose un échelon en entrée et on observe l'évolution de la sortie.



Rappel de physique : τ , Correspond au temps que met la sortie à atteindre 63% de sa variation ΔS . (C'est-à-dire de la différence entre la valeur prise par la sortie après et avant l'échelon)

Application :

$$K = \frac{12}{15} = 0.8$$

$$\tau = 10ms$$

$$S_0 = 4$$

Réponse à un échelon d'amplitude $\Delta E = 10$

$$s(t) = \Delta E \cdot K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + S_0$$

$$s(t) = 10 * 0.8 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{0.01}}\right) + 4$$

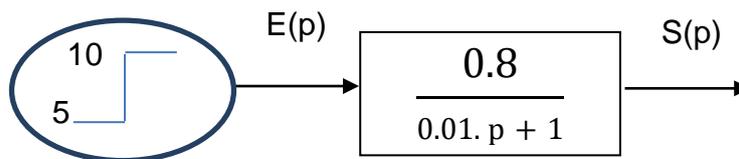
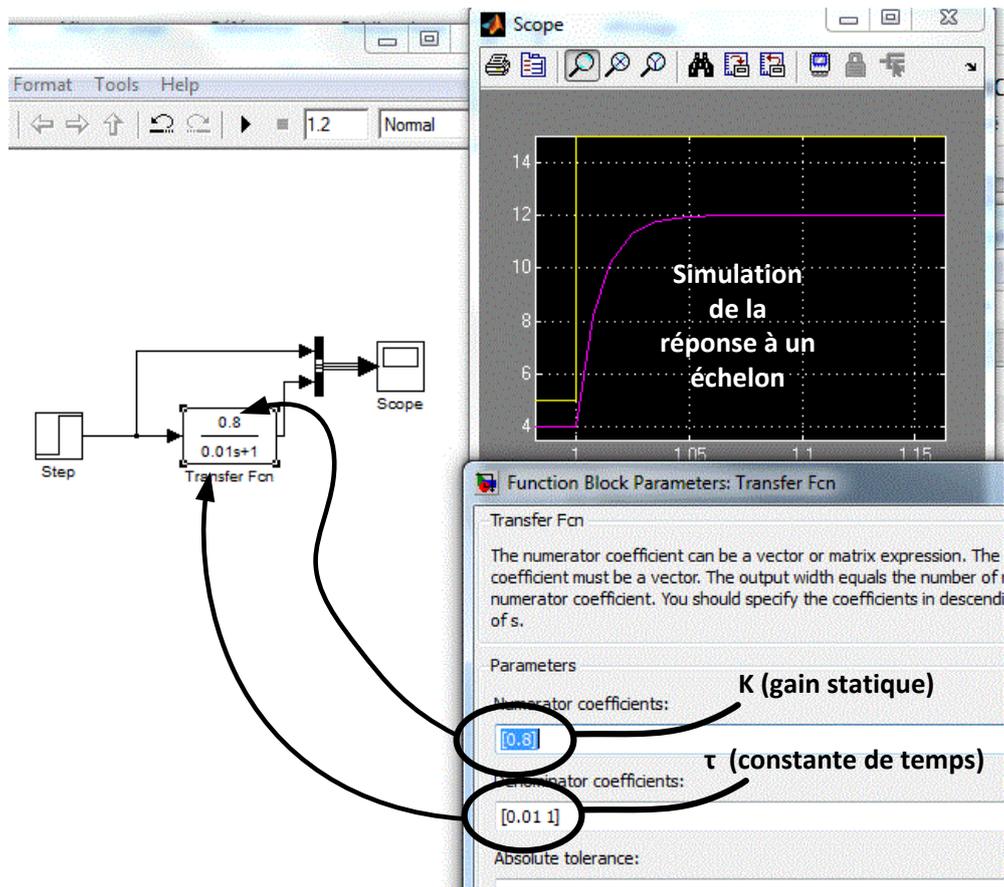
Mise sous forme de fonction de transfert

Les logiciels informatiques tels que Matlab utilise une transformation mathématique appelée la transformation de Laplace. Qui n'utilise plus le temps « t » comme variable, mais « p » la variable de Laplace.

Le logiciel fait ensuite tous les calculs complexes pour tracer l'évolution temporelle de n'importe quelle équation différentielle.

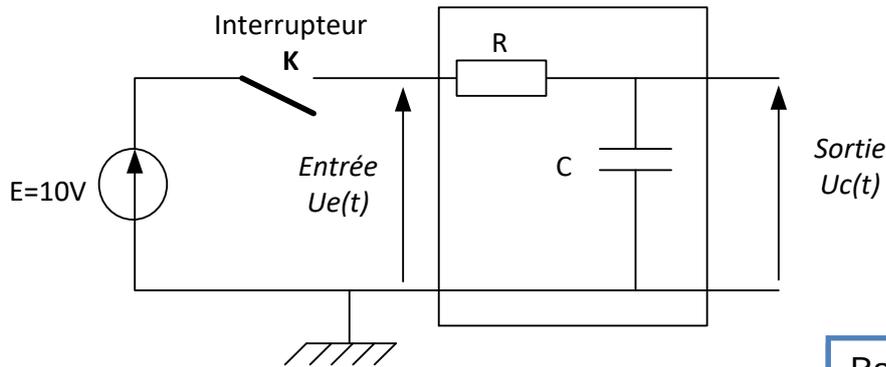
Un premier ordre possède une fonction de transfert dans le domaine de Laplace qui s'écrit :

$$F(p) = \frac{K}{\tau p + 1}$$

Application à notre exemple :**Simulation Matlab :**

2. Application : Le circuit RC

Montage :

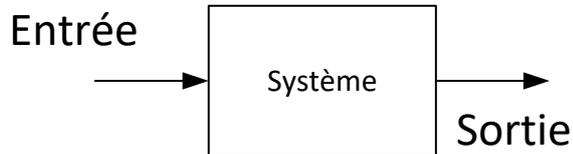


A $t = 0$, on ferme l'interrupteur K

$$E = 10 \text{ V} \\ U_c(t=0) = 0 \text{ V}$$

Rappel :

$$i_c = C \frac{du_c}{dt}$$



Exprimer l'entrée de notre système en fonction de la sortie, et la mettre sous la forme canonique $K \cdot e(t) = s(t) + \tau \frac{ds(t)}{dt}$:

.....

.....

.....

.....

Déterminer l'expression de la constante de temps τ et le gain statique K :

.....

.....

Donner l'expression de $U_c(t)$ pour $T > 0$:

.....

.....

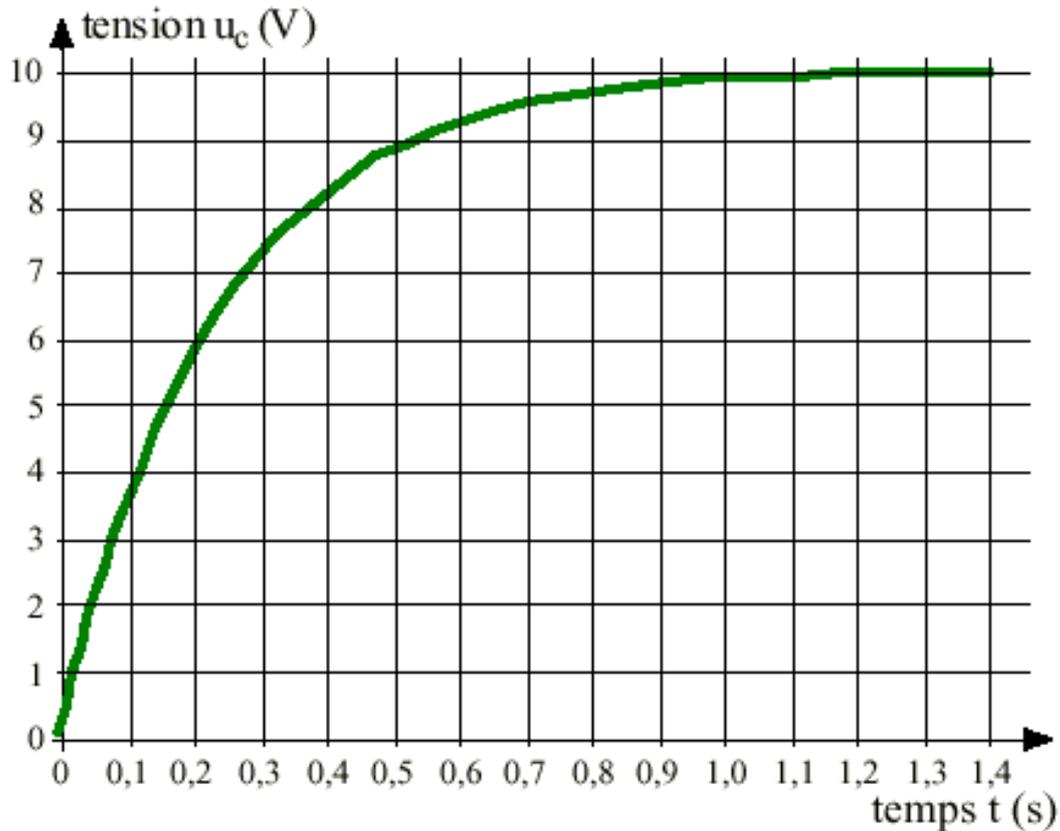
Pour $t = \tau$, exprimer $U_c(t = \tau)$ en pourcentage de l'échelon appliqué en entrée $\Delta U_e = 10 \text{ V}$:

.....

.....

.....

On a relevé la réponse de $u_c(t)$ à la sollicitation d'un échelon de 10V : Déterminer la constante de temps, et vérifier que la valeur du gain statique



.....

.....

.....

.....

3. Identification d'un système du 2nd ordre

L'équation différentielle la plus générale est:

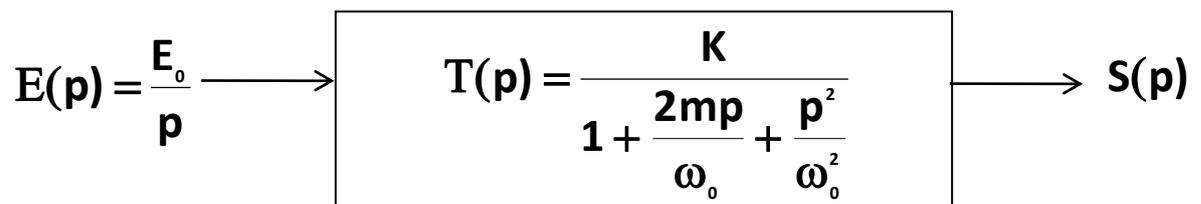
$$b_2 \frac{ds^2}{dt^2} + b_1 \frac{ds}{dt} + b_0 \cdot s(t) = a_2 \frac{de^2}{dt^2} + a_1 \frac{de}{dt} + a_0 \cdot e(t)$$

Nous considérons un système pour lequel $a_2=a_1=0$; la fonction de transfert peut se mettre sous la forme générale:

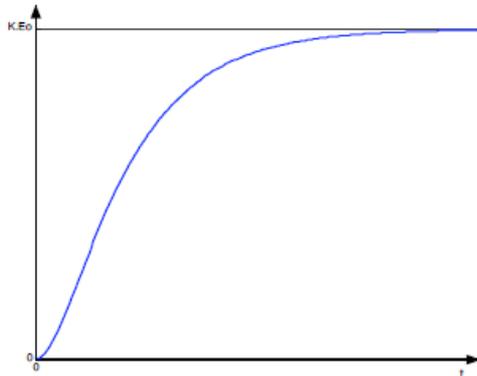
$$T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + \frac{2m}{\omega_0} p + 1}$$

- K est le gain statique du système.
- Ω_0 est la pulsation naturelle (en rd/s).
- m est le coefficient d'amortissement.

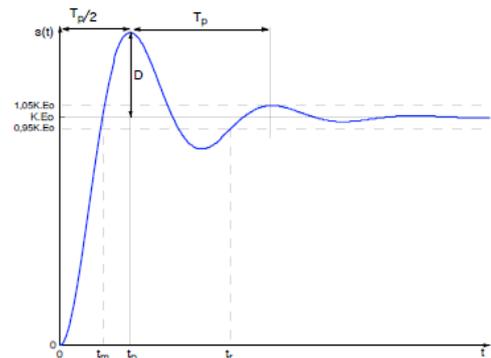
Réponse temporelle d'un système du second ordre à un échelon



Réponse pour $m \geq 1$

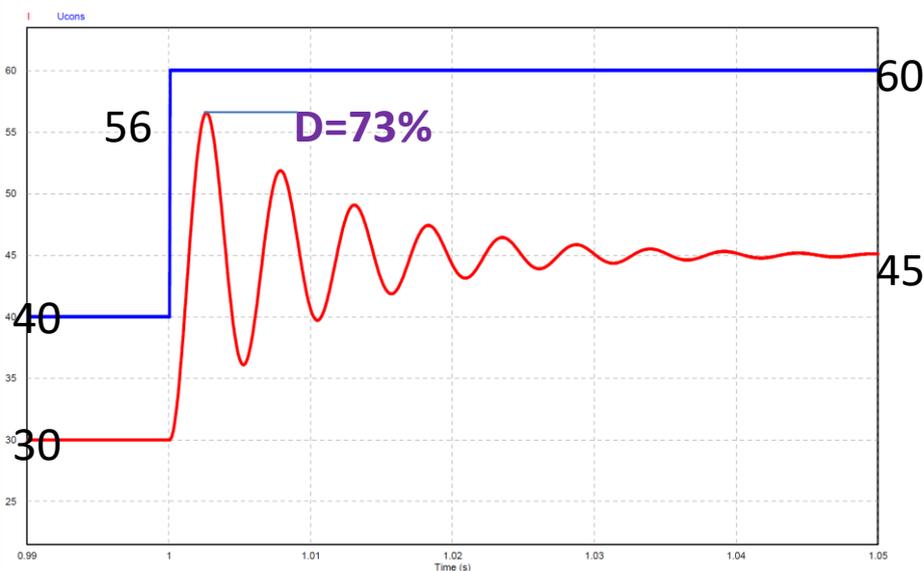


Réponse pour $m < 1$



- A l'origine, la tangente est horizontale.

Exemple



$$K = \frac{45}{60} = \frac{30}{40} = \frac{15}{20} = 0.75$$

Calculer la valeur du gain statique K du système :

.....

.....

Donner la valeur du 1^{er} dépassement en % :

.....

.....