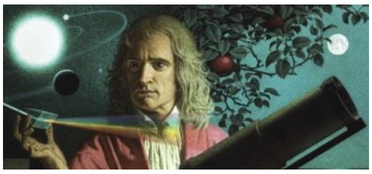
# 1. Les Lois de Newton

Au XVIIe siècle, Galilée énonce un principe simple :

*"Tout corps possède une certaine inertie qui l'oblige à conserver sa vitesse, à moins qu'une force extérieure l'oblige à arrêter ce mouvement."*



Moins d'un siècle après et en ayant bien pris soin de définir ce qu'est une masse, un poids et une force, Isaac Newton formule trois lois fondamentales :

**1ère loi :** **Principe d'inertie** : « Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et le contraigne à changer d'état. »

**2ème loi :** **Principe Fondamental de la Dynamique (PFD):** « Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice et se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée. »

**3ème loi :** **Principe des actions réciproques ou principe des actions mutuelles**: « L'action est toujours égale à la réaction, c'est-à-dire que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales et de sens contraires. »

# 2. Repères et référentiels

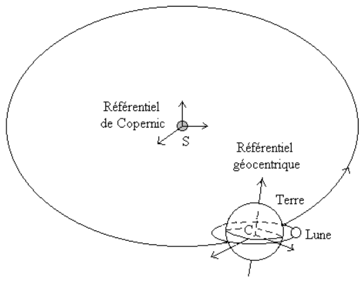
Un référentiel est l'association d'un repère d'espace, qui implique l'existence d'un "solide de référence" auquel on rapporte l'étude des mouvements, et d'un repère de temps ou "horloge".

Dans les études de dynamique newtonienne, **le référentiel sera dit galiléen** (« inertial frame of reference » en anglais) si le principe d'inertie y est vérifié. On différencie 3 référentiels galiléens en particulier :

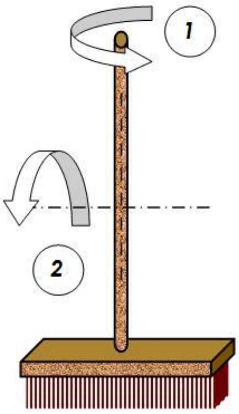
- **Le référentiel de Copernic (dit référentiel héliocentrique)** : son origine est au niveau du centre de masse du système solaire (correspondant au centre du Soleil), avec des axes pointant sur 3 étoiles très lointaines et considérées comme fixes. Il permet l'étude des mouvements des planètes dans le système solaire.

- **Le référentiel terrestre :** origine locale du repère de travail. Il convient en général aux phénomènes mécaniques classiques. Il peut être considéré comme galiléen sur une période d'observation relativement courte.

- **Le référentiel géocentrique :** son origine est au centre de la Terre, ses axes sont parallèles aux axes du référentiel de Copernic. Il permet l'étude du mouvement des satellites terrestres (repère en translation non rectiligne et non uniforme par rapport au précédent).



## 3. Moment d'inertie

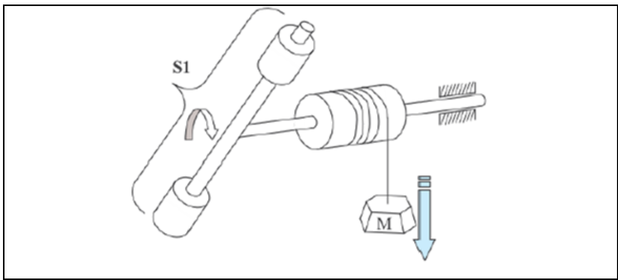


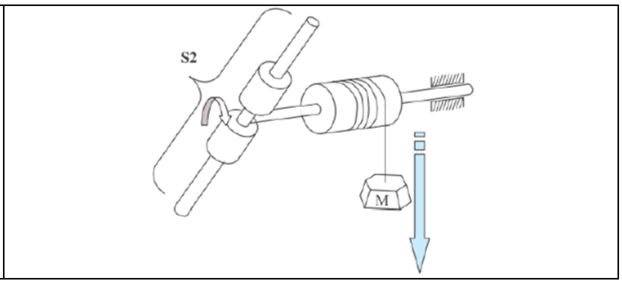

**Approche empirique**

Lorsque l'on prend un balai en main au milieu du manche et qu'on le fait tourner comme sur la figure ci-contre, il est plus aisé de le faire tourner autour de l'axe du manche (1), qu'autour de l'axe transversal indiqué (2).

Cela est dû au fait que dans le deuxième cas, la matière constituant le balai se trouve plus éloignée de l'axe de rotation. Comme pour un solide en rotation, la vitesse linéaire d'un point croît en proportion avec cet éloignement, il est nécessaire de communiquer une plus grande énergie cinétique aux points éloignés. D'où la plus grande *résistance* du balai à tourner autour d'un axe transversal qu'autour de l'axe du manche.

Les deux objets ci-dessous sont identiques, hormis la position des masselottes qui est plus éloignée du centre de rotation pour le solide S1.

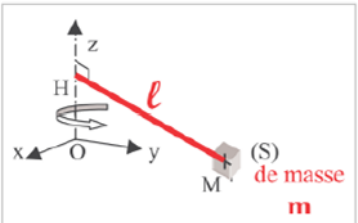



On lâche les masses M simultanément.

Constatation :
La masse liée au solide S2 descend plus vite. Le solide S2 est plus facile à mettre en mouvement de rotation que S1.
Les deux solides ont pourtant la même masse mais répartie différemment par rapport à l'axe de rotation.
Ils n'ont pas le même **moment d'inertie**.

**Calcul du moment d'inertie d'un solide**



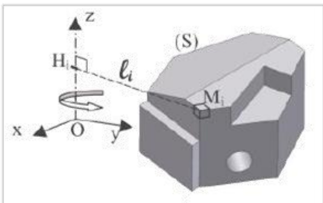

Soit un solide S modélisable par un point M de masse m.

Le moment d'inertie de S par rapport à un axe Oz est donné par la relation :

$$J_{OZ} = m \cdot \ell^2$$

En **kg.m²**

Si le solide est 2 fois plus lourd, il sera 2 fois plus difficile à entrainer en rotation.
Si le solide est 2 fois plus éloigné de l'axe, il sera 4 fois plus difficile à entrainer en rotation.

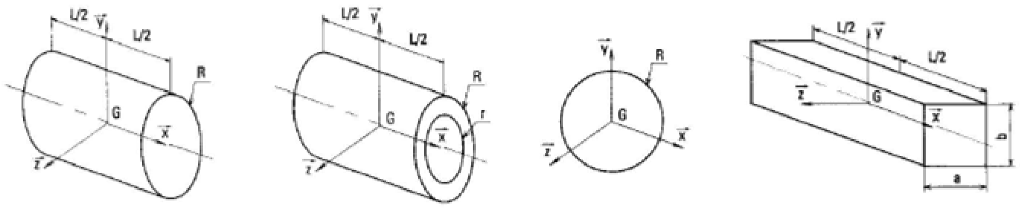



Tout solide peut être considéré comme une somme de points $M_i$ de masse $dm_i$, donc :
Le moment d'inertie d'un solide S par rapport à l'axe Oz est :

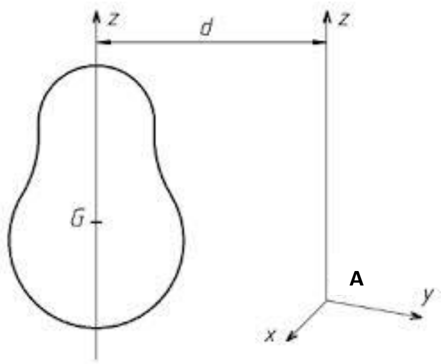
$$J_{oz} = \iiint_S \ell^2 \, dm$$

*Exemples de quelques moments d'inertie :*

| Cylindre plein | Cylindre creux | Sphère | Parallélépipède rectangle |
|---|---|---|---|
| masse $m = \pi R^2.L.\rho$ ($\rho$ : masse volumique) | $m = \pi(R^2 - r^2).L.\rho$ | $m = \frac{4}{3}\pi R^3.\rho$ | $m = a.b.L.\rho$ |
| $Jx = \frac{m.R^2}{2}$ | $Jx = \frac{m.(R^2+r^2)}{2}$ | $Jx = Jy = Jz = \frac{2}{5} m.R^2$ | $Jx = \frac{m}{12}(a^2+b^2)$ |
| $Jy = Jz = \frac{m.R^2}{4} + \frac{m.L^2}{12}$ | $Jy = Jz = \frac{m.(R^2+r^2)}{4} + \frac{m.L^2}{12}$ | | $Jy = \frac{m}{12}(a^2+L^2)$ |
| | | | $Jz = \frac{m}{12}(b^2+L^2)$ |



**Théorème de Huygens :**




Si on connaît le moment d'inertie d'un solide de masse m par rapport à l'axe (G,z), on peut trouver le moment d'inertie de ce solide par rapport à l'axe (A,z) distant de « d » de l'axe (G,z) :

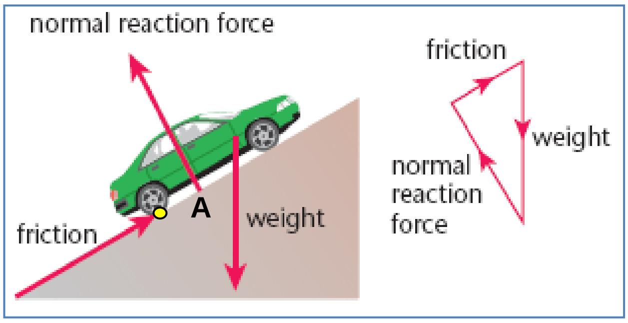
$$\boxed{J_{Az} = J_{Gz} + m.d^2}$$

## 4. 1ère loi de Newton ou Principe Fondamental de la statique (PFS)

Si un solide S est en équilibre ou se déplace en ligne droite à vitesse constante alors:

$$\sum \overrightarrow{\mathbf{F}_{(ext \to S)}} = \vec{0} \quad \text{(Théorème de la résultante)}$$

$$\sum \overrightarrow{\mathbf{M}_{A(F(ext \to S))}} = \vec{0} \quad \text{(Théorème du moment résultant)}$$




L'écriture sous forme de torseurs peut être utilisée:

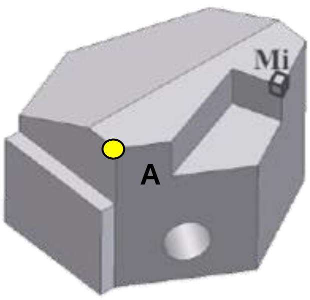
$$_A\begin{Bmatrix} X_1 & L_1 \\ Y_1 & M_1 \\ Z_1 & N_1 \end{Bmatrix} + {}_A\begin{Bmatrix} X_2 & L_2 \\ Y_2 & M_2 \\ Z_2 & N_2 \end{Bmatrix} + {}_A\begin{Bmatrix} X_3 & L_3 \\ Y_3 & M_3 \\ Z_3 & N_3 \end{Bmatrix} + \ldots\ldots + {}_A\begin{Bmatrix} X_n & L_n \\ Y_n & M_n \\ Z_n & N_n \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

## 5. 2ème loi de Newton ou Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

Soit un solide (S) quelconque de masse m. Il est composé de i points M de masse $m_i$.

$$\sum \overrightarrow{F_{(ext \to S)}} = \sum m_i \times \overrightarrow{\Gamma_{Mi/R}}$$ (Théorème de la résultante)

$$\sum \overrightarrow{M_{A(F(ext \to S)}} = \sum \overrightarrow{AM_i} \wedge (m_i \times \overrightarrow{\Gamma_{Mi/R}})$$ (Théorème du moment résultant)



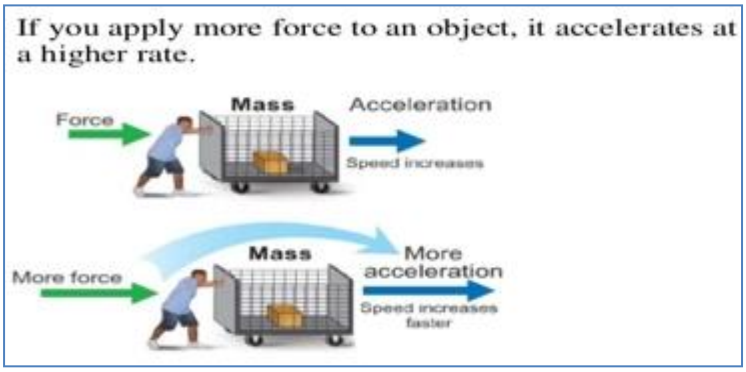

avec $\overrightarrow{\Gamma_{Mi/R}}$: vecteur accélération du point $M_i$ par rapport au repère R

## 6. PFD pour un solide ayant un mouvement de translation rectiligne

Pour un solide S, de masse m:

$$\sum \overrightarrow{F_{(ext \to S)}} = \mathbf{m} \times \overrightarrow{a_G}$$ (Théorème de la résultante)

$$\sum \overrightarrow{M_{A(F(ext \to S)}} = \vec{0}$$ (Théorème du moment résultant)




avec:

$\sum \overrightarrow{F_{(ext \to S)}}$ : résultante des actions mécaniques extérieures exercées sur le solide S (en N)

**m** : masse du solide (en kg)

$\overrightarrow{a_G}$ : vecteur accélération du centre de gravité G du solide S, dans le repère R (en m/s²)

$\sum \overrightarrow{M_{A(F(ext \to S)}}$ :moment résultant, en A, des actions mécaniques extérieures exercées sur le solide S (en Nm)

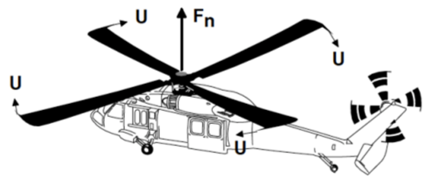
**<u>Principe de d'Alembert</u>**

Le principe de d'Alembert permet de ramener les problèmes de dynamique à des problèmes de statique à condition d'introduire de nouvelles forces appelées « forces d'inertie ».

Le principe de d'Alembert permet d'étendre le champ d'application des lois de Newton à des repères non galiléens.

La deuxième loi du principe fondamental peut aussi s'écrire :

$$\overrightarrow{R(ext \rightarrow s)} - m . \overrightarrow{\Gamma_{G/R}} = \overrightarrow{R(ext \rightarrow s)} + \overrightarrow{Fi} = 0$$



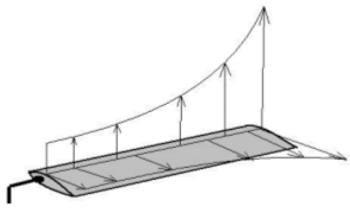

Dans ce cas :

$\overrightarrow{R\ (ext \rightarrow s)}$ Résultante des actions mécaniques extérieures exercées sur le solide S en N

$m$ Masse totale en kg

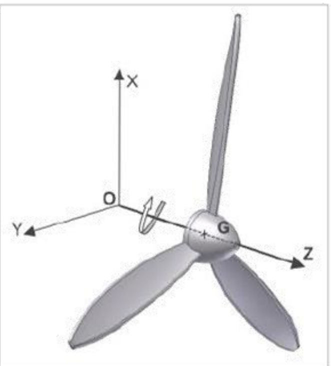
$\overrightarrow{\Gamma_{G/\Re}}$ Vecteur accélération du centre de gravité G du solide S dans le repère $\Re$ en $m.s^{-2}$

$\overrightarrow{Fi}$ **Force d'inertie** (opposée à l'accélération) $\overrightarrow{Fi} = - m . \overrightarrow{\Gamma_{G/R}}$



Toutes les méthodes appliquées en statique pourront être utilisables

## 7. PFD pour un solide ayant un mouvement de rotation autour d'un axe fixe




Nous considérerons, par hypothèse, que le solide S possède un axe de symétrie au niveau de la géométrie des masses.

Le centre de gravité G est donc situé sur l'axe de rotation (O,z)

$$\sum \overrightarrow{F_{(ext \rightarrow S)}} = \vec{0}$$ (Théorème de la résultante)

$$\sum \overrightarrow{M_{A(\overrightarrow{F(ext \rightarrow S)})}} = J_{oz} \times \frac{d^2\theta}{dt^2} \times \vec{z}$$ (Théorème du moment résultant)

avec:

$\sum \overrightarrow{F_{(ext \rightarrow S)}}$ : résultante des actions mécaniques extérieures exercées sur le solide S (en N)

$\sum \overrightarrow{M_{A(\overrightarrow{F(ext \rightarrow S)})}}$ :moment résultant, en A, des actions mécaniques extérieures exercées sur le solide S (en Nm)

$J_{oz}$ : moment d'inertie du solide S autour de l'axe Oz (en kg.m²)

$\frac{d^2\theta}{dt^2}$ : accélération angulaire du solide S (en rad/s²). Peut aussi être notée $\ddot{\theta}$ ou $\dot{\omega}$