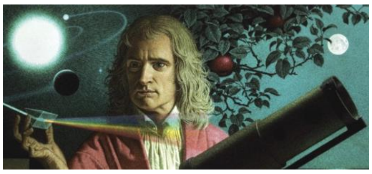
Le Principe fondamental de la Dynamique

Cours

1. Le Principe Fondamental de la dynamique (PFD)

Au XVIIe siècle, Galilée énonce un principe simple :

Tout corps possède une certaine inertie qui l'oblige à conserver sa vitesse, à moins qu'une force extérieure l'oblige à arrêter ce mouvement.



Moins d'un siècle après et en ayant bien pris soin de définir ce qu'est une masse, un poids et une force, Isaac Newton formule trois lois fondamentales :

1ère loi : Dans un repère galiléen, tout objet en état de mouvement rectiligne uniforme et n'étant soumis à aucune force extérieures, conserve son mouvement.

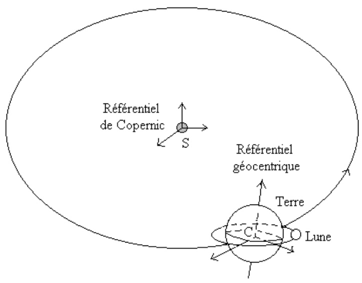
2ème loi : Force = masse x accélération

3ème loi : Tout corps soumis à une force exerce en retour une force de même intensité et de direction opposée.

Le **Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)** est la traduction avec les outils mathématiques actuels des lois de Newton.

2. Repères et référentiels

Le PFD ne peut s'exprimer que dans certains repères (référentiels), les repères Galiléens.



Repère de Copernic :
Origine au centre d'inertie du système solaire + trois directions stellaires « fixes ». tout repère en translation par rapport au repère de Copernic peut être considéré comme Galiléen.

Repère lié au centre d'inertie de la terre :
Origine au centre de la terre + les directions stellaires précédentes (repère en translation non rectiligne et non uniforme par rapport au précédent

Le repère terrestre :
Origine locale du repère de travail. Utilisation : convient en général aux phénomènes mécaniques classiques. Il peut être considéré comme galiléen sur une période d'observation relativement courte.

3. PFD sur un solide « ponctuel »

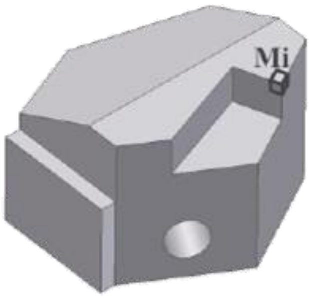
Si le solide (S) est soumis à des actions extérieures se réduisant à une résultante $\overrightarrow{R_{ext\to S}}$ alors son mouvement est tel que :

somme des forces extérieures = masse du solide x accélération du point M

$$\overrightarrow{R_{ext\to S}} = m\,.\overrightarrow{\Gamma_{M/R}}$$

unités :	N	=	kg	x	m/s^2

4. PFD sur un solide quelconque



Soit un solide (S) quelconque de masse m

Contrairement au solide précédent, celui-ci peut subir des efforts en différents points. Ceux-ci peuvent le faire tourner, il y aura donc présence de moments.

En appliquant la démonstration précédente à ce solide, il suffirait de considérer celui-ci comme la somme de points M_i, de masses m_i.

Si le solide (S) est soumis à des actions mécaniques extérieures quelconques :

$$\{\mathcal{T}(ext \to s)\} = {}_{A}\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R(ext \to s)} \\ \overrightarrow{M_A(ext \to s)} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{R(ext{\to}s)} = \sum m_i\,.\,\overrightarrow{\Gamma_{M_i/R}} & \text{Résultante mécanique = Résultante d} \\ \overrightarrow{M_A(ext \to s)} = \sum \overrightarrow{AM_i} \wedge (m_i\,.\,\overrightarrow{\Gamma_{M_i/R}}) & \text{Moment mécanique = Moment dyn} \end{cases}$$

On peut aussi écrire en utilisant les torseurs:

$$\{\mathcal{T}\ \text{mécanique}\} = \{\mathcal{T}\ \text{dynamique}\}$$

5. Mouvement de translation rectiligne

Simplification de l'écriture :

$$\sum m_i\,.\,\overrightarrow{\Gamma_{M_i/R}} = m\,.\,\overrightarrow{\Gamma_{G/R}}$$

Masse totale

Vecteur accélération du centre de gravité G

Si un solide (S) est en mouvement de translation par rapport à un repère galiléen R, alors :

$$\begin{cases} \overrightarrow{R\,(ext \to s)} = m\,.\,\overrightarrow{\Gamma_{G/\Re}} \\ \overrightarrow{M_G(ext \to s)} = \vec{0} \end{cases}$$

$\overrightarrow{R\,(ext \to s)}$	Résultante des actions mécaniques extérieures exercées sur le solide S en N
$\overrightarrow{M_G(ext \to s)}$	Moments résultant en G des actions mécaniques extérieures exercées sur le solide S en N.m
m	Masse totale en kg
$\overrightarrow{\Gamma_{G/\Re}}$	Vecteur accélération du centre de gravité G du solide S dans le repère $\Re$ en $m.s^{-2}$

Principe de d'Alembert

Le principe de d'Alembert permet de ramener les problèmes de dynamique à des problèmes de statique à condition d'introduire de nouvelles forces appelées « forces d'inertie ».

Le principe de d'Alembert permet d'étendre le champ d'application des lois de Newton à des repères non galiléens.

La deuxième loi du principe fondamental peut aussi s'écrire :

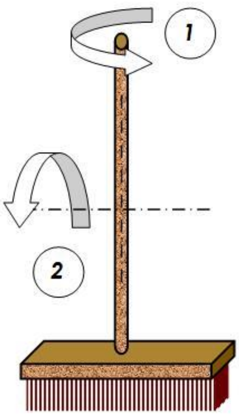
$$\overrightarrow{R(ext \to s)} - m\,.\,\overrightarrow{\Gamma_{G/R}} = \overrightarrow{R(ext \to s)} + \overrightarrow{Fi} = 0$$

Dans ce cas :

$\overrightarrow{R\,(ext \to s)}$	Résultante des actions mécaniques extérieures exercées sur le solide S en N
m	Masse totale en kg
$\overrightarrow{\Gamma_{G/\Re}}$	Vecteur accélération du centre de gravité G du solide S dans le repère $\Re$ en $m.s^{-2}$
$\overrightarrow{Fi}$	**Force d'inertie** (opposée à l'accélération) $\overrightarrow{Fi} = -\,m\,.\,\overrightarrow{\Gamma_{G/R}}$

Toutes les méthodes appliquées en statique pourront être utilisables

6. Moment d'inertie



Approche empirique

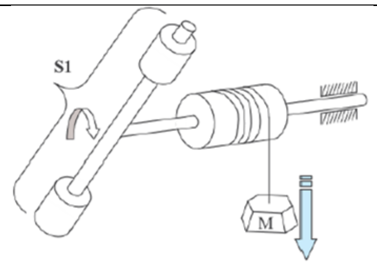
Lorsque l'on prend un balai en main au milieu du manche et qu'on le fait tourner comme sur la figure ci-contre, il est plus aisé de le faire tourner autour de l'axe du manche (1), qu'autour de l'axe transversal indiqué (2).

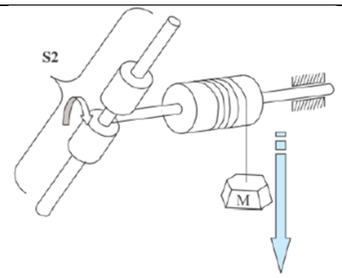
Cela est dû au fait que dans le deuxième cas, la matière constituant le balai se trouve plus éloignée de l'axe de rotation. Comme pour un solide en rotation, la vitesse linéaire d'un point croît en proportion avec cet éloignement, il est nécessaire de communiquer une plus grande énergie cinétique aux points éloignés. D'où la plus grande *résistance* du balai à tourner autour d'un axe transversal qu'autour de l'axe du manche.

Le Principe fondamental de la Dynamique

S-SI
Cours

Les deux objets ci-dessous sont identiques, hormis la position des masselottes qui est plus éloignée du centre de rotation pour le solide S1.

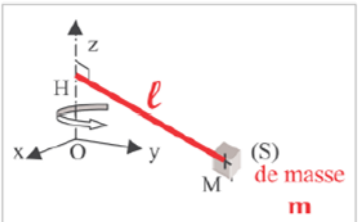




On lâche les masses M simultanément.

Constatation :
La masse liée au solide S2 descend plus vite. Le solide S2 est plus facile à mettre en mouvement de rotation que S1.
Les deux solides ont pourtant la même masse mais répartie différemment par rapport à l'axe de rotation.
Ils n'ont pas le même **moment d'inertie**.

Calcul du moment d'inertie d'un solide

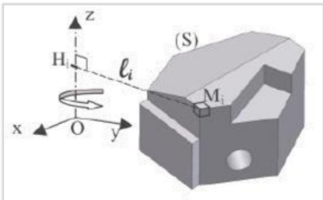


Soit un solide S modélisable par un point M de masse m.

Le moment d'inertie de S par rapport à un axe Oz est donné par la relation :

$$J_{OZ} = m \cdot \ell^2$$ En **kg.m²**

Si le solide est 2 fois plus lourd, il sera 2 fois plus difficile à entrainer en rotation.
Si le solide est 2 fois plus éloigné de l'axe, il sera 4 fois plus difficile à entrainer en rotation.

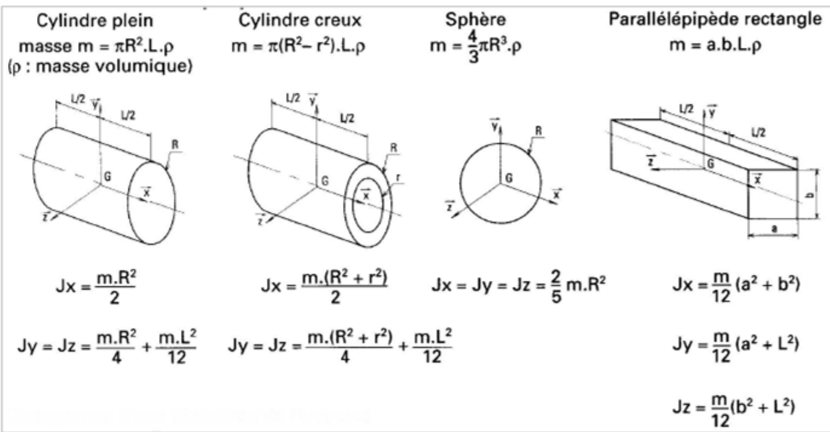


Tout solide peut être considéré comme une somme de points M_i de masse dm_i, donc :

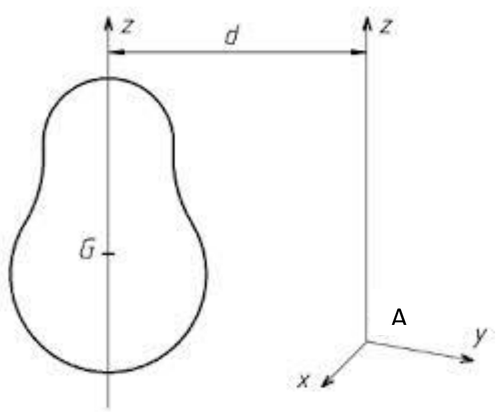
Le moment d'inertie d'un solide S par rapport à l'axe Oz est :

$$J_{oz} = \iiint_S \ell^2 \, dm$$

Exemples de quelques moments d'inertie :



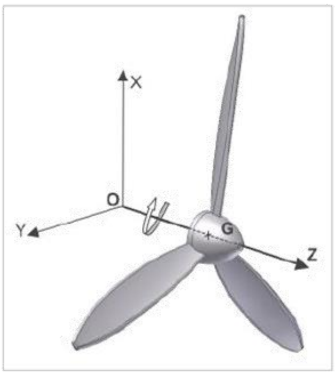
Théorème de Huygens :



Si on connaît le moment d'inertie d'un solide de masse m par rapport à l'axe (G,x), on peut trouver le moment d'inertie par rapport à l'axe (A,x) distant de « d » de l'axe (G,x) :

$$\boxed{J_{Ax} = J_{Gx} + m.d^2}$$

7. Mouvement de rotation autour d'un axe



Nous considérerons, par hypothèse, que le solide S possède un axe de symétrie au niveau de la géométrie des masses.

Le centre de gravité G est donc situé sur l'axe de rotation (O,z)

$$\left\{\begin{array}{lll} \overrightarrow{R\,(ext \rightarrow s)} & = & \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{oz}(ext \rightarrow s)} & = & J_{oz}\,.\,\ddot{\theta}\,.\,\vec{z} \quad \text{ou} \quad J_{oz}\,.\,\dot{\omega}\,.\,\vec{z} \end{array}\right.$$

$\overrightarrow{R\,(ext \rightarrow s)}$ Résultante des actions mécaniques extérieures exercées sur le solide S en N

$\overrightarrow{M_G(ext \rightarrow s)}$ Moments résultant en G des actions mécaniques extérieures exercées sur le solide S en N.m

J_{oz} Moment d'inertie du solide S autour de l'axe oz en $kg.m^2$

$\ddot{\theta}$ ou $\dot{\omega}$ Accélération angulaire du solide S en $rad.s^{-2}$